目　　录

第三篇　射影空间　映象法

第 一 篇

向量代数初步
平面解析几何

第一章 向 量

§1 向量、向量加法、数乘向量

1．已知平行六面体$ABCDA'B'C'D'$．在诸有向线段$\overline{A'D'}$，$\overline{C'D'}$，$\overline{C'B'}$，$\overline{A'B'}$，$\overline{A'C'}$，$\overline{DC}$，$\overline{DA}$，$\overline{AA'}$，$\overline{CC'}$，$\overline{DD'}$中，指出下列各线段：(a) 与$\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{BC}$，$\overline{BB'}$相等的；(b) 与$\overline{AA'}$平行但不相等。

2．设A，B，C，D为任意四点，并设M，N，P，Q分别为线段〔AB〕，〔BC〕，〔CD〕，〔DA〕的中点。证明有向线段$\overline{MN}$与$\overline{QP}$相等。

3．证明：所有有向线段的集合W上的相等关系是等价关系，即它有反身性、对称性和传递性。

4．已知有向线段集合W上的关系τ，且若关系τ为

$$(\overline{AB}\ \tau\ \overline{CD}) \Longleftrightarrow (|AB|=|CD|, \overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{CD})\ (\forall \overline{AB}、\overline{CD}\in W).$$

试问它是否是等价关系？

5．证明：所有非零向量集合上的共线关系是一个等价关系。为什么该关系不是所有向量集合上的等价关系？

6．已知向量$\vec{a}$，其长等于3．求与$\vec{a}$反向的向量$\vec{b}$，设$|\vec{b}|=5$．

7．设M是三角形ABC的重心（中线交点），证明$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$，并且对任意点$O$等式$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$成立。

8．设M，N，P，Q是五边形$ABCDE$各边〔AB〕，〔CD〕，〔BC〕，〔DE〕的中点，而K，L是线段〔MN〕，〔PQ〕的中点．证明直线（AE）和（KL）平行且$|KN|=\frac{1}{4}|AE|$．

9. 把四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充要条件写成向量形式。

10. 利用向量写出点 A, B, C, D 是梯形 $ABCD$ ((AB) $\parallel$ (CD)) 顶点的条件。

11. 给定了三点 A, B, C. 作出点 Q, 使得 $\overrightarrow{QA}-2\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{O}$.

12. A, B, C, D是空间的任意点，作出线段[AD] 和[BC]的中点 M 与 N . 证明: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

13. 将点本身及以该点为心的心反射用同一字母表示。证明，为使点 C 是线段[AB]的中点，充要条件是使反射的合成 $C\circ B\circ C\circ A=e$, 其中 e 是恒等变换。

14. 已知封闭折线 $ABCD$. 点 K, L, M, N 按同一比值($\neq 1$)分各线段 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. 证明: 如果 $KLMN$ 是平行四边形，则 $ABCD$ 也是平行四边形。当 $\lambda=1$ 时，此命题是否仍然正确?

15. 对二非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 在什么条件下才可能有下列各等式: (1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; (2) $\vec{a}+\vec{b}=\lambda(\vec{a}-\vec{b})$; (3) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; (4) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; (5) $|\vec{a}+\vec{b}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||$; (6) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

16. 证明存在一个三角形，其各边都相等并且平行另一三角形的三中线。

17. 点 M_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 各面的重心， 而其各面的对顶点是 A_i. 证明各线段 [A_iM_i] ($i=1, 2, 3, 4$) 通过一点 M、而 $(A_iM_i, M)=3$, 且 $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}=\overrightarrow{O}$.

18. 点 M 是正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心。证明: $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}=\overrightarrow{O}$, 并且对任意点$O$下列等式成立:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}\right).$$

19. 证明对每个有限点集$A_1, A_2, \cdots, A_n$ ($n>1$)都存在唯一点

M，使得$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{O}$，并对任意点$O$下列等式成立：$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}\right)$.

20．将点M是三角形ABC中线交点（重心）的充要条件写成向量形式。

21．将点本身及以该点为心的心反射用同一字母表示。证明点M是三角形ABC的重心，当且仅当反射的合成

$$M\circ C\circ M\circ B\circ M\circ A=e$$

其中e是恒等变换。

22．用有向线段$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$构成一平行六面体。证明该平行六面体的对角线〔OD〕与平面(ABC)相交于三角形ABC的重心M处。

23．证明：四面体四个侧面的四个重心，是其位似四面体的顶点。

24．位于各点M_1，M_2，…，M_n处的质量为m_1，m_2，…，m_n．已知半径向量$\overrightarrow{OM_i}=\vec{r_i}$（$i=1$，…，$n$）．（1）求该质点系重心的半径向量，（2）如果$m_1=m_2=\cdots=m_n$，则和$\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}+\cdots+\overrightarrow{MM_n}=\vec{O}$.

25．若点P与Q分别是线段〔AB〕和〔CD〕的中点。证明线段〔AC〕，〔BD〕，〔PQ〕的中点共线。

26．已知四面体$ABCD$和两点P、Q，以及$(AB,\ P)=(CD,\ Q)$．证明线段〔AC〕，〔BD〕，〔PQ〕的中点共线。

27．在空间里给出了两个三点组A，B，C和A_1，B_1，C_1，并且$(AC,\ B)=(A_1C_1,\ B_1)$．证明线段〔AA_1〕、〔BB_1〕、〔CC_1〕的中点共线。

28．证明：要使点C属于直线(AB)，必须且亦只需有这样的数α，使$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$其中$O$是任意点。

29．证明：要使点C属于射线〔AB〕，必须且亦只需有这样的非负数α，使$\overrightarrow{OC}=(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}$其中$O$是任意点。

30．已知：$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$二数$\alpha$和$\beta$满足什么条件，才

能使点C属于：（1）直线(AB)；(2)射线$[AB)$；(3)线段$[AB]$。

31．点M与N按等比分两个有向线段$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$．证明向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{MN}$共面。

32．证明要使四点A_1，A_2，A_3，A_4共面，必须且亦只需

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\overrightarrow{PA_1}+\alpha_2\overrightarrow{PA_2}+\alpha_3\overrightarrow{PA_3}+\alpha_4\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{O}\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\end{aligned}\right\}$$

其中P是任意点且至少有一个$\alpha_i\neq 0$.

33．过四面体$OABC$的棱$[OA]$和侧面ABC的重心引一直线，该直线与平面(OBC)相交于D点。证明：$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

34．过三角形ABC的一顶点C引直线l，它与直线(AG)和(BG)的交点分别为A_1和B_1，其中G是三角形的重心。证明：$(AA_1, G)+(BB_1, G)=1$.叙述并证明其逆命题。

35．已知三角形ABC及点A_0、B_0、C_0，以及$(BC, A_0)=\lambda_1$，$(CA, B_0)=\lambda_2$，$(AB, C_0)=\lambda_3$.证明：要使三点A_0、B_0、C_0属于一条直线，必须且亦只需$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$（梅涅劳(Menelaus)定理）。

36．某直线与各直线(BC)，(CA)，(AB)分别相交在点A_1，B_1，C_1.证明三个向量$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1}$，$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{C_1A_1}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$共线。

37．证明：要使四边形的两个对边平行，必须且亦只需连接它们中点的线段过对角线的交点。

38．证明：要使四边形是平行四边形，必须且亦只需连接它对边中点的线段通过其对角线的交点。

39．三点B_1，B_2，B_3分别属于三角形$A_1A_2A_3$的各边，并且两个三角形$A_1A_2A_3$和$B_1B_2B_3$的重心重合。证明点B_1，B_2，B_3分三角形$A_1A_2A_3$各边成等比。

40．过平行四边形两个对顶点引与边或边的延长线交成四点的两条直线。证明此四点是梯形的顶点或是平行四边形的顶点。

41．验证复数$a+bi$ ($i^2=-1$，a，$b\in R$)的集合构成向量空间。

42．各元素取自已知域K的n行一列的矩阵称作《向量》，并且

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{pmatrix},\ \lambda\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\\lambda\alpha_2\\\vdots\\\lambda\alpha_n\end{pmatrix}$$

证明：这样矩阵的集合构成向量空间。

43．设 C 是在区间$[a, b]$上给定的连续函数的集合。验证自然运算为 $f(x)+g(x)$，$\lambda f(x)$，$(\lambda\in R,\ f,\ g\in C)$ 的集合C 能成为向量空间。

44．设V'和 V'' 是向量空间 V 的**子空间**。证明它们的交集也是向量子空间。

§2　向量的坐标

45．已知梯形$ABCD$ $(\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{AB})$ 。点 M 和 N 是底$[AB]$与$[DC]$的中点，$(AC)\cap(DB)=P$

（1）取向量 $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$作基底，求诸向量 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PB}$ 的坐标。

（2）取向量 $\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{PB}$ 作基底，求诸向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$ 的分解式。

46．在三角形 ABC 内作角 A 的平分线$[AD]$．将向量 $\overrightarrow{AD}$ 按向量 $\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$ 分解。

47．在平面上，对某个基底用其坐标给出了三个向量：$\vec{a}(4, -2)$、$\vec{b}(3, 5)$、$\vec{c}(-2, -12)$。将向量 $\vec{c}$ 表示成向量$\vec{a}$ 和$\vec{b}$的线性组合。

48．已知非共线向量$\vec{a}$，$\vec{b}$．证明向量组 $\vec{m}=3\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{n}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ **线性相关**，而向量$\vec{n}$，$\vec{p}$，不共线。将向量 $\vec{m}$ 按向量$\vec{n}$，$\vec{p}$分解。

49．向量$\vec{a}$对于基底$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$的坐标是（2，1）．求向量$\vec{a}$对基底$\vec{e}'_1$，$\vec{e}'_2$的坐标，假设(1) $\vec{e}'_1=4\vec{e}_1$，$\vec{e}'_2=-\dfrac{2}{3}\vec{e}_2$；(2) $\vec{e}'_1=3\vec{e}_1-$

$\vec{e}_2$, $\vec{e}'_3=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2$.

50. 设 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$是空间 V 的基底。证明向量 $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$，$\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$共线，当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0 .$$

51. 设点 M 是三角形 ABC 的重心。求各向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}$对基底 $\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$的坐标。

52. 设点M是三角形 ABC 的重心。分解：（1）$\overrightarrow{MA}$按向量$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$；（2）$\overrightarrow{AB}$ 按向量 $\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$；(3) $\overrightarrow{OA}$ 按向量 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OM}$；这里 O是空间的任意点。

53. 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与平行四边形 $ABCD$ 关于平面(ABC)外一点O 对称。取向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$作基底，求向量$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{DD_1}$及$\overrightarrow{AP}$的坐标，其中 P 是$[A_1B_1]$的中点。

54. 在就基底 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$给出的各向量 $\vec{a}(0, -3, 0)$，$\vec{a}_2(-2, 0, 5)$，$\vec{a}_3(0, 2, -1)$，$\vec{a}_4(0, 0, 4)$，$\vec{a}_5(1, 0, 0)$，$\vec{a}_6(0, 1, -3)$，$\vec{a}_7(1, -2, 3)$，$\vec{a}_8(0, 0, 0)$ 里，指出下列向量：（1）与$\vec{e}_2$共线的；（2）与向量 $\vec{e}_2$和$\vec{e}_3$ 共面的。

55. 对基底$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$给出了向量 $\vec{p}(-3, 6, -13)$，$\vec{a}(1, 0, -2)$，$\vec{b}(1, -1, 3)$，$\vec{c}(-2, 3, 0)$.将向量$\vec{p}$表示成向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的线性组合。

56. 已知三个不共面向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$.设$\overrightarrow{AB}\in\vec{e}_1$，$\overrightarrow{AC}\in\vec{e}_2$，$\overrightarrow{CD}\in\vec{e}_3$，$\overrightarrow{AB_1}\in\alpha\vec{e}_1$，$\overrightarrow{CD_1}\in\alpha\vec{e}_3(\forall\alpha\in R)$。证明三向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{B_1D_1}$共面。

57. 点 O 是直角三角形 ABC 斜边的中点。点 D 关于直线(AB)与顶点 C 对称。证明：

$$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}-(2\cos 2\hat{A})\ \overrightarrow{OA} .$$

58. 从点 O 截取二有向线段 $\overrightarrow{OA}\in\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}\in\vec{b}\ (\vec{a}\nparallel\vec{b})$. 用$\vec{a}$和$\vec{b}$表示与角 AOB 的平分线共线的任一向量。

59. 在空间里给出了这样的三点 A，B，C：$(AB,C)=\lambda$ 和任一点$M\notin(AB)$. 分解：(1) $\overrightarrow{MC}$按 $\overrightarrow{MA}$和 $\overrightarrow{MB}$；(2) $\overrightarrow{MB}$按 $\overrightarrow{MA}$和

$\overrightarrow{MC}$；(3) $\overrightarrow{AB}$ 按 $\overrightarrow{MA}$ 和$\overrightarrow{MC}$.

60．设点 P 与 Q 是四面体二对棱[BC]和[AD]的中点，G 是它的重心．取向量 $\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GC}$ 作基底，求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标。

61．给出了三棱柱$ABCA_1B_1C_1$.取向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 作基底，求向量$\overrightarrow{MN}$的坐标。其中 M是平行四边形 BCC_1B_1 的中心，N 是三角形 $A_1B_1C_1$的重心。

62．棱锥 $SABCD$ 的底是平行四边形 $ABCD$．取向量 $\overrightarrow{SA}$，$\overrightarrow{SB}$，$\overrightarrow{SC}$ 作基底，求各向量 $\overrightarrow{SD}$，$\overrightarrow{SM}$,$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AP}$的坐标。其中 M 是线段[AD]的中点，而$(BC, P)=2$。

§3 向量的数量积

63．证明向量$\vec{p}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{q})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{q})$和$\vec{q}$相互垂直。

64．对标准正交基给出了 $\overrightarrow{AB}(2, 2, 1)$及 $\overrightarrow{BC}(1, 4, 8)$．求 $\cos\widehat{ABC}$.

65．向量的数量积是否具有下述实数乘积的类似性质：(1)若 $ab=0$，则 a 与 b 中至少有一个数等于零；(2) $ab=ba$；(3)若 $ab=cb$；且$b\neq0$，则$a=c$；(4) $(a+b)c=ac+bc$；(5) $a(bc)=(ab)c$.

66．已知平行四边形 $ABCD$.说明下列各等式的几何意义：(1) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$；(2) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=2(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2)$；(3) $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2$.

67．已知三非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，并且向量 $\vec{a}$ 不与向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 正交。试问在什么条件下等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 成立？

68．证明：在三角形 ABC 里，角 ABC 是直角，当且仅当 $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$.

69．证明：三角形三中线长的平方和等于其边长平方和的$\frac{3}{4}$.

70. 计算平行四边形$ABCD$对角线的长，设$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+3\vec{b}$，其中$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\pi}{3}$。

71. 证明：梯形二对角线长的平方和等于两腰长的平方和再加上两底乘积的二倍。

72. 证明：四边形二对角线长的平方和等于连接两组对边中点之二线段长的平方和的二倍。

73. 证明：四边形各边长的平方和等于其二对角线长的平方和再加上该二对角线中点间距离平方的四倍(欧拉(Euler)定理)。

74. 已知矩形$ABCD$.证明对空间任一点M,下列等式成立：
(1) $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2$； (2) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

75. 三面角的平面角的值各等于45°，45°，60°. 求各二面角的值。

76. 给出了三条有公共始点又互相垂直的射线(OA)，(OB) (OC).求二角AOB与BOC平分角线之间的夹角。

77. 在立方体内求下列各角的值：（1）它的对角线与其侧面相错对角线的夹角；（2）两个邻面二相错对角线间的夹角；（3）立方体的对角线与侧面相交对角线间的夹角。

78. 求等腰三角形ABC的顶角BAC，已知从底边二顶点引的二中线$[BB_0]$和$[CC_0]$互相垂直。

79. 设$[BB_0]$是三角形ABC的高。将向量$\overrightarrow{BB_0}$按基底向量$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}$来分解。

80. 对标准正交基$\vec{i}$，$\vec{j}$给出了向量$\vec{a}(a_1, a_2)$。求向量$\vec{x}$的坐标，它是这样的向量：$\vec{x}\perp\vec{a}$、$|\vec{x}|=|\vec{a}|$.

81. 在正方形$ABCD$的二边$[AB]$，$[BC]$上，分别给出点P和Q，使$|BP|=|BQ|$.设$[BH]$是三角形BPC的高。证明：$(HQ)\perp(HD)$.

82. 以直角三角形ABC的斜边$[AB]$作一正方形，其中心M_0与顶点C位于直线(AB)的异侧。已知，$|AC|=b$，$|BC|=a$，求$|M_0C|$.

83．对标准正交基$\vec{i}$，$\vec{j}$求向量$\vec{c}$的坐标，它的方向是由二非零向量$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$夹角之角平分线所确定的。

84．在三角形ABC内，点D按比值λ分线段$\overline{AB}$．

（1）以$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$为基底向量来分解向量$\overrightarrow{CD}$．

（2）已知三角形的边长为a，b，c。求线段$[CD]$的长（斯梯瓦(Stewart)定理）。

（3）证明：若$[CD]$是三角形内（外）角的角分线，则

$$\lambda=\frac{|CA|}{|CB|}\left(\lambda=-\frac{|CA|}{|CB|}\right)$$

（4）应用斯梯瓦定理求长。

(a) 三角形ABC内角A的角平分线；

(b) 外角A的角平分线；

(c) 边$[BC]$的中线。

85．设在凸n边形F内部给定了一点M_0．证明：多边形F存在一条这样的边，过点M_0向该边引的垂线之垂足是该边的内点。

86．设$A_1A_2\cdots A_n$是简单n角形（其边不自交），其中$|A_iA_{i+1}|=a_i$，而φ_i是顶点为A_i的外角值。证明：

$$a_1\cos\varphi_1+a_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cdots+a_n\cos(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)=0,$$

$$a_1\sin\varphi_1+a_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)+\cdots+a_n\sin(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)=0.$$

87．已知平面Σ及点$A\notin\Sigma$。求所有点Y的集合，它使$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AY}=d^2$，其中$X=[AY]\cap\Sigma$．

88．已知两个非共线向量$\vec{a}$和$\vec{b}$．解关于x的方程式：

$$\frac{\vec{a}^2+x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{a}+x\vec{b}|}=\frac{\vec{b}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}||\vec{a}+\vec{b}|}.$$

89．在三角形ABC内引中线$[CM]$及角平分线$[CC_1]$．作(CM)关于(CC_1)的对称直线，交(AB)于点C_2．证明$|AC_2|:|C_2B|=|AC|^2:|BC|^2$．

90．说明方程$\vec{a}\cdot\vec{x}=k$之解的几何意义。其中$\vec{a}$是已知非零向量，k是已知数，$\vec{x}$是未知向量。

91. 给出了三个非共面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. 求向量 $\vec{p}$, 使它与平行于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的平面相垂直。

92. 设三角形的二中线相等。证明该三角形等腰。

93. 设 $ABCD$ 是正方形, E 是边$[AD]$的中点, $F\in(AC)$, $F\neq A$.证明要使二直线(EF)与(FB)互相垂直, 必须且亦只需$(AC, F)=3$.

94. 设点 D 是等腰三角形ABC($|CA|=|CB|$)底边的中点, 点E是过点D向直线(BC)引的垂线之垂足, F 是线段$[DE]$的中点。证明直线(AE)与(CF)垂直。

95. 在直角三角形 ABC ($\hat{C}=90°$) 内作出了高$[CD]$.直线(AM) (M是高$[CD]$的中点) 与直角边$[CB]$交于点 P .证明: $|CP|:|PB|=\cos^2\widehat{A}$.

96. 关于标准正交基给出了非共线向量$\vec{a}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$和$\vec{b}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$.求与$\vec{a}$和$\vec{b}$每个向量都垂直的单位向量的坐标。

97. 棱锥 $SABCD$ 的底是矩形 $ABCD$, 锥高之垂足是该矩形对角线的交点 O .试确定各角$\widehat{ASB}$、$\widehat{BSC}$、$\widehat{ASC}$ 余弦间的相互关系。

98. 已知三面角$Oabc$ 三个面的角为α、β、γ; 角φ是棱 c 与该棱在相对侧面上的正射影 h 间的夹角。计算角 φ 的余弦。

99. A是球面(O, R)上的给定点, P是一平面上的任一点。若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2$, 试问球面与平面的相互位置关系如何?

100. 在一球面的二点 A 与 B 处作二切平面Ω和Σ .过线段$[AB]$的中点 M 作任一直线 l, 它与球面的交点是 U 和 V, 而与二切平面的交点是X和 Y 。如果 $\overrightarrow{MU}=k_1\vec{e}$, $\overrightarrow{MV}=k_2\vec{e}$, $\overrightarrow{MX}=k_3\vec{e}$, $\overrightarrow{MY}=k_4\vec{e}$ (其中$\vec{e}$是直线l的方向向量),则

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}$$

101. 设 $ABCD$ 是一球面的内接四面体。各直线(GA)、(GB), (GC), (GD) (G 是四面体的重心) 与球面又分别相交于点A_1, B_1, C_1, D_1.证明:

$$(AA_1, G)+(BB_1, G)+(CC_1, G)+(DD_1, G)=4.$$

102．在圆周上给定两点A和B，求点X的集合，它使$(AA_1, X)+(BB_1, X)=2$．其中A_1和B_1是二直线(AX)及(BX)与圆周的另两个交点。

103．$ABCD$是球面的内接四面体。过顶点D及三角形ABC之重心G引直线又与球面相交于点M．证明：$\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{DC}^2=3\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DM}$.

104．证明立方体所有棱在一平面上的正射影之长的平方和，与立方体和平面的相互位置无关。

105．以a为棱的立方体向一平面作平行于直线l的射影。计算立方体的全部棱在给定平面上之射影长的平方和。如果l与平面的夹角为φ。

第二章　平面坐标法

§1 平面坐标系

习题106—120中的坐标系是仿射坐标系。

106. 依据平行四边形的三个顶点P,Q和R的坐标，算出其第四顶点的坐标：

(1) $P(1,\ 4)$，$Q(3,\ -1)$，$R(0,\ 2)$；

(2) $P(-1,\ 0)$，$Q(2,\ 1)$，$R(4,\ -1)$。

107. 证明三点 A，B，C 共线：

(1) $A(2,\ 1)$，$B(0,\ 5)$，$C(4,\ -3)$；

(2) $A(-1,\ 0)$，$B(1,\ -2)$，$C(3,\ -4)$。

并说明哪个点位于其它两点之间。

108. 写出射线$[AB)$的参数方程：

(1) $A(3,\ 1)$，$B(2,\ -1)$；

(2) $A(1,\ -1)$，$B(-2,\ 0)$；

(3) $A(0,\ 1)$，$B(2,\ -3)$.

109. 写出线段$[AB]$的参数方程：

(1) $A(3,\ 1)$，$B(-2,\ 4)$；

(2) $A(-1,\ 0)$，$B(4,\ -2)$；

(3) $A(1,\ 1)$，$B(3,\ -1)$.

110. 在任一六边形中将各边中点间隔一点连成线段，组成两个三角形。证明这两个三角形的中线交点重合。

111. 直线l位于三角形ABC所在平面且不含其中任一顶点。证明，如果直线l与三角形中的一边相交，那末它也必和其余二边之一相交，但不和第三条边相交（**巴士 Pasch 命题**）。

112. 设点K,L分别是平行四边形$ABCD$之二边$[BC]$与$[CD]$

122．根据等边三角形二顶点A与B的坐标计算其另一顶点的坐标。

(1) $A(1,\ 1)$，$B(2,\ -1)$；

(2) $A(0,\ 0)$，$B(-2,\ 1)$．

123．根据等边三角形的顶点 A 及重心G 的坐标算出其余两顶点的坐标。

(1) $A(2,\ 0)$，$G\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$；

(2) $A(-2,\ 1)$，$G(0,\ 1)$．

124．根据三角形ABC的顶点坐标，判明它是锐角的、直角的、或是钝角的？

(1) $A(1,\ 1)$，$B(3,\ -1)$，$C(7,\ 3)$；

(2) $A(4,\ 0)$，$B(1,\ 1)$，$C(5,\ 4)$；

(3) $A(2,\ 1)$，$B(3,\ 2)$，$C(6,\ 5)$．

125．根据正方形$ABCD$顶点A与C的坐标算出顶点B与D的坐标。

(1) $A(1,\ 1)$，$C(-2,\ -1)$；

(2) $A(-1,\ 0)$，$C(3,\ 1)$；

(3) $A(4,\ 2)$，$C(0,\ 1)$．

126．根据正方形$ABCD$顶点A和B的坐标算出顶点C和D的坐标。

(1) $A(0,\ -1)$，$B(-2,\ 1)$；

(2) $A(3,\ 1)$，$B(2,\ 5)$；

(3) $A(0,\ 1)$，$B(1,\ 2)$．

127．已知正六边形$ABCDEF$．根据顶点A和B的坐标算出顶点C的坐标。

(1) $A(1,\ 1)$，$B(-2,3)$；

(2) $A(2,\ -1)$，$B(3,\ 1)$．

128．已知三角形ABC各顶点的坐标：$A(3,\ 3)$，$B(-2,3)$，$C(0,\ -1)$．算出该三角形各角之角平分线与对边交点的坐标。

129. 对标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$，由方程$2x^2+4x+3y-1=0$给出了图形Φ及点$O'(-1, 1)$。在标架$(O', \vec{i}, \vec{j})$下，求圆形Φ的方程。

130. 对标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$由方程$2xy=1$给出了图形Φ。在标架$(O, \vec{i'}, \vec{j'})$下，求图形Φ的方程，其中$(\vec{i}, \vec{i'})=\frac{\pi}{4}$.

131. 点C位于点A和B之间。以线段$[AC]$和$[CB]$为底作等边三角形ACD和BEC，并使顶点D和E位于(AB)同侧。设M和N是线段$[AE]$和$[BD]$的中点，证明三角形MNC是等边的。

132. 求这样的一个点，该点到三角形三个顶点距离的平方和最小。用三角形的边长a、b、c表出此最小和。

133. 以任意三角形的各边向外作正三角形。证明这三个正三角形的中心又是一个正三角形的顶点。

134. 以任意四边形$ABCD$的各边向外作正方形。证明这四个正方形的中心是对角线相等并垂直的四边形的顶点。

135. 线段$[AD]$，$[AM]$，$[AH]$分别是三角形ABC（$|AB|\neq|AC|$）的内平分角线、中线和高线。求比值$\lambda=(HM, D)$，如果$|AB|=c$，$|AC|=b$，$|BC|=a$。证明点D位于H和M之间。

136. 在平面上给出了标准正交标架及点$M\left(\sqrt{2}-1, \frac{1}{2}\right)$. 证明不存在有整数坐标且到点$M$等距的两个不同点。

137. 证明正方格纸的任何三个顶点都不能组成等边三角形。

138. 在定向平面上给出了正六边形$ABCDEF$，$|AB|=a$。在极坐标系（射线$[AB)$是极轴）下，求六边形各顶点的坐标。

139. 在三角形ABC里$|AC|=|BC|$，高$|CH|=3$，规定角BAC的方向为正。已知$A(6, -2)$，$B(4, 0)$，求点C的坐标。

140. 证明：若连接凸四边形两对边中点的线段等于其余两边和之半，则这个四边形是梯形或是平行四边形。

§2 直线、圆

在习题141—178中，坐标系是仿射的。

$$2x-y+4=0,$$
$$6x-3y+1=0.$$
求此二直线在坐标轴上所截线段中点的坐标。

152. 已知两条平行直线：

$$l_1: x+3y-1=0,$$
$$l_2: -3x-9y+2=0.$$

写出过各线段$[M_iN_i]$ $(M_i\in l_1,\ N_i\in l_2)$中点的直线方程。

153. 写出三角形ABC各中线所在直线的方程。已知三角形顶点的坐标如下：

(1) $A(-2,\ 0)$，$B(-1,\ 3)$，$C(1,\ 1)$；

(2) $A(-1,\ 4)$，$B(1,\ 2)$，$C(3,\ -1)$.

154. 已知三角形ABC各中线所在直线的方程是：

$$2x-y+1=0,$$
$$x+3y=0,$$
$$-x+y+2=0.$$

求该三角形各边所在直线的方程。

155. 已知对称中心为M的平行四边形 $ABCD$. 写出 (AB)，(BC)，(CD)，(DA)，(AC)，(BD)诸直线的方程。设

(1) $A(2,\ 1)$，$B(-1,\ 0)$，$M(-4,\ 3)$；

(2) $A(3,\ -1)$，$B(1,\ 2)$，$M(-1,\ 0)$.

156. 已知平行四边形的两边$[AB]$和$[BC]$所在直线方程：

$$x+3y+2=0,$$
$$3x-y=0$$

写出二边$[CD]$，$[DA]$所在直线的方程。设点$M(2,\ 1)$是平行四边形的对称中心。

157. 证明：用方程给出的三条直线

l_1: $3x-y+4=0$，l_2: $2x-y+1=0$，l_3: $x-2y=0$

不过同一点。求过点$A=l_2\cap l_3$且平行直线l_1的直线方程。

158．在标架$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$下，已知点$P(3,2)$及二直线方程$l_1$：$3x-2y+2=0$，$l_2$：$3x+5y-12=0$．求以点$P$为线段$[M_1M_2]$之中点的直线$l$的方程，其中$M_1=l\cap l_1$，$M_2=l\cap l_2$．

159．在平行四边形$ABCD$的一边$[AD]$上取点P，使$|AP|=\frac{1}{n}|AD|$，$(AC)\cap(PB)=Q$．证明：

$$|AQ|=\frac{1}{1+n}|AC|.$$

160．证明：对边不平行的任意四边形二对角线的两个中点与端点为两组对边交点的线段的中点共线（高斯（Gauss）定理）。

161．证明：若一直线有两个具有整数坐标的点，则具有整数坐标的无限点集属于该直线。

162．已知两个点$A(2, -1)$，$B(3, 1)$．判明用方程：(1) $x+3y-5=0$；(2) $3x-y+1=0$；(3) $2x+y=0$ 给出的直线l是否把两点A,B隔在两侧？

163．已知二直线$3x+y=0$和$2x-3y+1=0$及点$M(-2,1)$．写出由二直线所确定的且含有点M的那个角的解析条件。

164．阐明用下列两组点给出的四边形$ABCD$是否是凸四边形？

(1) $A(3, 1)$，$B(-2, 4)$，$C(-1, 0)$，$D(3, -1)$；

(2) $A(2, 1)$，$B(-3, 0)$，$C(4, -2)$，$D(-1, -1)$．

165．确定点$M_0(2, 6)$和直线l：$x-3y-5=0$关于三角形$ABC(A(0, 1)$，$B(-2, 5)$，$C(4, 9))$的位置关系。

166．写出由下列两组直线组成的带形区域的解析条件：

(1) $3x+y-1=0$，$6x+2y+3=0$；

(2) $x+2y+2=0$，$2x+4y-7=0$．

167．已知三点$A(-4, -2)$，$B(-2, 1)$，$C(2, 3)$．写出决定$ABCD$是平行四边形的解析条件。

168．已知三项式：$p_1(x, y)=x-3y-5$，$p_2(x, y)=2x-$

$-6y+1$, $p_3(x, y)=x+y-2$; $p_4(x, y)=3x+3y+$[illegible] 以及：

$$\Phi=\{M(x, y) \mid p_1\leqslant 0,\ p_2\geqslant 0,\ p_3\leqslant 0,\ p_4\geqslant 0\}.$$

试问Φ表示的是什么样的图形？

169．已知四个点$A(2, 3)$，$B(3, 1)$，$C(5, 2)$，$D(9, 1)$．证明该四点是一梯形的顶点，并给该梯形命名。

170．已知三角形$ABC(A(2, 1), B(-1, 4), C(3, -2))$．三条直线$(BC)$，$(CA)$，$(AB)$将平面上的点（不属于三直线的）分成7个区域。写出其中包含坐标原点那个区域的坐标式。

171．三角形三边所在的直线是：

(1) $x+y-4=0$, $2x-y=0$, $3x+2y-12=0$；

(2) $x+2=0$, $9x-y=0$, $x-y+3=0$．

写出该三角形所给定区域*的坐标式。

172．设一三角形各边的直线方程是l_i: $A_ix+B_iy+C_i=0$ $(i=1, 2, 3)$，求点$M_0(x_0, y_0)$位于三角形内部的条件。

173．设坐标原点属于二直线

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

所决定的钝角内。求该二直线方程系数应满足的条件。

174．根据二线段$[AB]$和$[CD]$的端点说明它们是否有公共点？端点是

(1) $A(3, 1)$，$B(-2, 0)$，$C(0, 1)$，$D(-3, 2)$；

(2) $A(1, 0)$，$B(2, 4)$，$C(3, 0)$，$D(0, 6)$．

175．证明二射线：

$[AB)=\{M(x, y) \mid x=1+t,\ y=2-t,\ t\geqslant 0\}$

$[CD)=\{M(x, y) \mid x=2-3t,\ y=4+3t,\ t\leqslant 0\}$

方向一致，并写出决定这两条射线所在的那个半平面$[(AC), M)$的解析条件。

176．写出决定凸角BAC的解析条件，设

---

* 区域是译者加的

184．过点P引一条到点A和B等距的直线。设：

(1) $P(1,\ 1)$，$A(3,\ -1)$，$B(-2,\ 1)$；

(2) $P(0,\ -2)$，$A(1,\ 3)$，$B(-1,\ 2)$.

185．在射线 $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t, \end{cases}$ $t\leqslant 0$

上求一点B，使B点到射线始点的距离等于d.

(1) $d=3$；(2) $d=5$.

186．已知直线l与点A.计算由点A向直线l引的垂线之垂足的坐标。假设直线l及点A是：

(1) $3x+4y-1=0$，$A(2,\ -1)$；

(2) $x+3y+2=0$，$A(-2,\ 3)$.

187．求点$M_1(x_1, y_1)$ 关于直线$Ax+By+C=0$的对称点M_2的坐标。

188．已知三角形二高线的直线方程及一个顶点的坐标。计算三角形其余二顶点的坐标。设：

(1) $3x+4y-7=0$，$2x-y-1=0$，$A(5,\ -3)$；

(2) $3x+4y-2=0$，$4x-y+2=0$，$A(0,\ -1)$.

189．三角形ABC高线的交点H.又知各直线方程(AB)：$4x+y-12=0$，(AH)：$2x+2y-9=0$，(BH)：$5x-4y-15=0$.写出直线(BC)，(AC)的方程。

190．已知正方形$ABCD$的一顶点$A(2,-5)$及直线方程(BD) $3x-y+6=0$.求正方形各边所在直线的方程 。

191．在等腰三角形ABC($|BA|=|BC|$)中,已知二顶点的坐标$A(4,\ 3)$，$B(-1,\ 2)$ 及直线方程为 (BD)：$3x-2y+7=0$，$(BD)\perp(AC)$.求直线(AB)和(BC)的方程。

192．已知等腰三角形ABC($|BA|=|BC|$)及内角 ABC 之平分角线所在直线方程 l：$x-y+1=0$，点 $A_0(1,\ -1)\in(BC)$，$B_0(0,\ 3)\in(AB)$，$C_0(3,\ 2)\in(AC)$。求直线 (BC)，(AC)，(AB)的方程。

193．光射线经点 $M_1(1,\ 1)$并依次经直线 l_1：$x-y-2=0$，

l_2：$2x+y-1=0$反射通过点$M_2(2,\ 2)$。求射向l_1并经l_1和l_2反射成的各射线所在直线的方程。

194．过三角形中线的交点引直线d。求三角形三顶点到此直线距离之间的关系式。

195．已知直线方程l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$ $(C_1\neq C_2)$．求二直线l_1与l_2间的距离。

196．写出直线的方程，已知经该直线对称后把直线$x+y+1=0$变成直线$2x-y=0$．

197．在Ox轴上求到下列直线等距的点。设：

(1) $x+3y+2=0$，$3x-y+1=0$；

(2) $3x+y-1=0$．$4x-3y=0$．

198．写出到下列各组平行直线等距的直线方程。设：

(1) $x+y+3=0$，$2x+2y-1=0$；

(2) $3x+4y-1=0$，$3x+4y+4=0$；

(3) $2x-y=0$，$4x-2y+5=0$．

199．过点M和N引二平行直线，使它们之间的距离等于d：

(1) $M(1,\ 2)$，$N(3,\ -1)$，$d=3$；

(2) $M(0,\ -1)$，$N(2,\ 1)$，$d=1$；

(3) $M(2,\ 1)$，$N(6,\ 4)$，$d=5$．

200．已知直线l的方程$Ax+By+C=0$及点$M_0(x_0,\ y_0)\notin l$．写出直线$l'\subset(l,\ M_0)$的方程，直线l'平行直线l且与其距离等于h．

201．写出一点集的方程，它的每一点与下列各组中的二直线距离之比为$m:n$．设

(1) $x+y-1=0$，$3x+y=0$，$m:n=1:2$；

(2) $3x-y+1=0$．$2x-y+2=0$，$m:n=3:4$；

(3) $4x-2y+1=0$．$x-2y-1=0$，$m:n=4:1$．

202．写出二直线l_1：$x-2y-3=0$和l_2：$2x-y+5=0$夹角之平分线所在的、且使点M_0（1，1）位于其上的直线方程。

203．已知边长等于1的正方形。在此平面上求作一个图形，该图形每一点到正方形各边所在直线的距离之和等于4．

204．已知坐标原点是一正方形的中心，其中正方形一边所在直线的方程是$x+2y-1=0$．计算该正方形各顶点的坐标。

205．给出了三角形ABC的各顶点$A(-3,2)$，$B\left(\frac{2}{3},\ \frac{22}{3}\right)$，$C\left(-\frac{5}{3},\ \frac{25}{3}\right)$。求正方形$AMNP$的顶点$M$，$N$，$P$的坐标。已知$B\in[MN]$，$C\in[NP]$。

206．根据菱形$ABCD$二顶点A，B的坐标及直线(CD)的方程，计算其余二顶点的坐标。设：

(1) $A(1,\ 1)$，$B(-2,\ 3)$；(CD)：$2x+3y+5=0$；

(2) $A(0,\ 4)$，$B(2,\ 3)$；(CD)：$x+2y-3=0$．

207．已知二直线方程l_1：$3x-y-2=0$；l_2：$x-3y+5=0$．写出二直线l_1和l_2所交锐角之平分线所在直线l的方程。

208．已知直线方程(AB)：$2x-y-3=0$，(BC)：$x-2y-1$$=0$，$(CD)$：$2x-y+5=0$，这些直线过菱形$ABCD$的相邻顶点，且已知点$M_0(1,\ -1)$．求直线$(AD)\subset((BC),\ M_0)$的方程。

209．点$M_0(3,\ -2)$位于等腰三角形ABC之底$[BC]$上。已知直线方程(AB)：$3x-4y-3=0$及(AC)：$4x-3y+7=0$，写出直线(BC)的方程。

210．已知二相交直线：

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

证明：若

$$(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)(A_1A_2+B_1B_2)<0,$$

则点$M_0(x_0,\ y_0)$位于该二直线交成的二锐角之一的内部。

211．已知等腰三角形$ABC(|AB|=|BC|)$以及

(AB)：$3x-2y+3=0$，(AC)：$2x-y-5=0$

并且点$M_0(1,\ 1)\in(BC)$．求直线(BC)的方程。

212．已知直线方程l_1：$2x-y-5=0$，l_2：$x+3y+7=0$．设二直线l_1与l_2交角中含有点$M_0(1,\ 1)$的角为φ，计算角φ的余弦。

213．证明：由方程l_1：$7x-5y+11=0$，l_2：$3x+2y-16=0$，

l_3: $4x-7y-2=0$ 给出的三条直线构成一三角形，并计算该三角形各内角的正切。

214．已知等腰直角三角形ABC的直角顶之坐标 $C(4, -1)$，以及该三角形斜边$[AB]$所在直线方程$3x-y+5=0$．求其二直角边所在直线的方程。

215．光线射向直线 l，直线l的方程为$2x-3y-6=0$，且该光线经反射成横轴。求该光线所在直线的方程。

216．已知等腰三角形 ABC 之底边上的二顶点 $A(1, 2)$，$B\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$，并知道一内底角之平分线所在直线$l$的方程为$x-y+1=0$，写出该三角形各边所在直线的方程。

217．已知直线方程 $l_1: x+3y=0$，$l_2: x-y+8=0$．求一条这样的直线l_3 的方程，使l_2是l_1与l_3所夹的一对对顶角之平分线所在的那条直线。

218．设$ABCD$是菱形。已知直线方程(AB)：$x+3y+12=0$，(CD)：$x+3y-8=0$，(AC)：$x-2y+2=0$．求二直线(BC)，(AD)的方程。

219．已知三角形 ABC 及一点 P．作平行四边形 $BPCA_1$，$CPAB_1$，$APBC_1$．证明三条直线 (AA_1)，(BB_1)，(CC_1)相交于一点。

220．直线p和平行四边形$ABCD$的二边$[AD]$、$[BC]$平行，与$[AB]$和$[CD]$交于点M和N．而直线q和该平行四边形的其余两边平行，与$[AD]$、$[CB]$交于点P和Q．证明直线(PM)，(NQ)，(BD)属于同一线束、而直线(PN)，(MQ)，(AC)属于另一线束。

221．在标准正交标架下，系数$a_{ij}(i, j=0, 1, 2)$在什么条件下能使图形

$$\Phi=\{M(x, y)\mid a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0\}$$

是(a)圆周；(b)点；(c) $\Phi=\phi$？

222．说明（不用作图）所给的三个圆中每两个的相互位置关系。设

$$x^2+y^2-6x+2y+1=0,$$

$$x^2+y^2+2x+8y+13=0,$$
$$x^2+y^2-10y=0.$$

223．计算三角形ABC的外接圆之圆心M的坐标，设已知三角形各顶点的坐标：

(1) $A(2,\ 1)$，$B(-1,\ 4)$，$C(3,\ -1)$；

(2) $A(0,\ 1)$，$B(-1,\ 2)$，$C(2,\ 3)$．

224．已知三角形ABC各边所在直线的方程，计算该三角形内切圆的圆心M之坐标。设

(1) $x+2y=0$，　　　(2) $2x-3y=0$，

$2x-y+1=0$，　　　$2x+3y-1=0$，

$2x+y-2=0$；　　　$3x+2y+4=0$．

225．将由二圆给定的圆环写成坐标表示式。设

$$x^2+y^2=4,\qquad x^2+y^2=25.$$

226．下列不等式给出的点集是什么图形？

$$x^2+y^2<-4x+6y.$$

227．求直线$y=kx+b$与圆$x^2+y^2=R^2$相切的条件。

228．写出圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 给出的劣弧AB 的坐标表示式。设

(1) $A(4,\ 2)$，$B(6,\ -2)$；

(2) $A(1,\ 3)$，$B(4,\ 2)$．

229．设圆与菱形同心。证明圆上任一点到菱形各顶点距离之平方和是一常数。

230．求一平面点集，该点集的每一点到边长为$2a$的正方形各顶点距离之平方和等于常数b^2。

231．边长为$2a$的正方形内接于一圆。证明圆周上的任一点到正方形各边距离之平方和等于常数$8a^2$．

232．证明：如果过某点M引一直线与圆相交于两点A和B，则乘积$|MA|\cdot|MB|$与该直线无关．

233．圆内接正三角形ABC，点M是圆劣弧AB上的一点。证明：$|MC|=|MA|+|MB|$．

241．在直线$2x-y-10=0$上找一点，使该点到点$P(-5,0)$和$Q(-3,4)$的距离之和最小。

242．已知二点$A(5,2)$和$B(2,1)$。在直线$x+y-5=0$上找一点M，使$\widehat{AMB}=45^{\circ}$．

243．两条平行直线$x+y-2=0$，$x+y+3=0$绕着坐标原点旋转90°．求所给二直线与其旋转后的二直线交点的坐标。并证明四个交点是正方形的顶点。

244．两条平行直线$x-y+1=0$，$x-y+2=0$绕坐标原点旋转30°．求已知二直线与旋转后的二直线的交点坐标。并证明四个交点是菱形的顶点。

245．一定长线段的一端沿圆$x^2+y^2=r^2$滑动，而另一端在Ox轴上滑动（曲柄连杆机构）。线段上一点将其分成a、b两部份，求这点所作曲线方程。

246．对标架$(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$给出了各点$A(2,\ 5)$，$B(1,\ 3)$，$C(3,\ 6)$，$M(-1,\ 4)$．如果点$M\in\angle BAC$，试问角$BAC$的定向如何？

247．直线d过三角形ABC之顶点A及中线$[BB_0]$的中点，并且$d\cap(BC)=N$．证明关系式：$(BC,\ N)=\frac{1}{2}$．

248．设平行四边形$ABCD$二边$[AD]$和$[BC]$的二中点是E与K．证明：直线(BE)和(KD)分对角线$[AC]$成三个相等线段。叙述并证明其逆命题。

249．已知两个平行四边形$ABCD$和$AMNP$，其中$M\in[AB]$，$P\in[AD]$．证明三直线(MD)，(BP)，(NC)相交于一点。

250．在三角形ABC中作一内接平行四边形$ADEF$，使顶点D，E，F分别在边$[AB]$，$[BC]$，$[AC]$上。过边$[BC]$之中点M引直线(AM)，$(AM)\cap(DE)=K$．证明$CFDK$是平行四边形。

251．在三角形ABC里引中线$[CD]$，P是中线$[CD]$的任一点．$(AP)\cap(BC)=K$，$(BP)\cap(AC)=M$．证明：$(MK)\parallel(AB)$．

252．已知三角形ABC及异于其顶点的各点$C_1\in(AB)$，

$A_1\in(BC)$、$B_1\in(AC)$.证明诸直线(AA_1)，(BB_1)，(CC_1)属于同一线束，当且仅当$(AB, C_1)\cdot(BC, A_1)\cdot(CA, B_1)=1$（**赛瓦**(Ceva)**定理**）。

253．已知三角形ABC和异于其顶点的各点$C_1\in(AB)$，$A_1\in(BC)$，$B_1\in(CA)$，以及$(AA_1)\cap(BB_1)\cap(CC_1)=M_0$.证明：$(AA_1, M_0)=(AC,B_1)+(AB,C_1)$（**方—奥勒利**(Van—Obely)**定理**）。

254．点M和N分别是平行四边形$ABCD$两边$[DC]$与$[CB]$上的点。过二线段$[DM]$和$[AB]$之中点引直线，再过二线段$[AD]$和$[BN]$之中点引直线。此两直线交于点S，证明直线(AS)过线段$[MN]$的中点。

255．已知三角形ABC．直线l和直线(BC)，(CA)，(AB)分别交于点A_1，B_1，D_1．在各直线上作点A_1，B_1，C_1关于其边中点的对称点A_2，B_2，C_2．证明A_2，B_2，C_2三点共线。

256．在直线p_1上给出了三个点A_1，B_1，C_1；在另一条直线上也给出了三个点A_2，B_2，C_2．证明三点：$P=(A_1B_2)\cap(A_2B_1)$，$Q=(B_1C_2)\cap(B_2C_1)$，$R=(C_1A_2)\cap(C_2A_1)$共线(**巴卜**(Pappus)**定理**)。

257．证明：正方形四顶点到过其中心的直线之距离的平方和与此直线的选取无关。

258．设在平面内的一圆上取一个定点。证明该定点到此圆任一直径端点的距离之平方和是常数（与直径选取无关）。

259．已知两个任意圆。证明：从一个圆的任意直径的两端点到另一圆任意直径的两端点之距离的平方和是常数（与直径选取无关）。

260．求一平面点集，该点集的每一点到矩形的一条对角线两端点距离之平方和等于该点到另一条对角线两端点距离之平方和。

261．设A_0、B_0、C_0是三角形ABC三高线的垂足。证明：两个三角形ABC与$A_0B_0C_0$的周长之比等于其外接圆半径的比。

262．证明：在矩形平面内任取一点，该点到矩形各顶点距

离之平方和是该点到矩形各边所在直线的距离之平方和的两倍。

263．证明：三角形ABC之垂足三角形$A_0B_0C_0$的周长等于三角形ABC面积的二倍再除以其外接圆的半径。

264．证明：若某圆的圆心与三角形的重心重合，则该圆周上的任一点到三角形顶点距离之平方和是常数。

265．已知平行直线a和b，它们的对称中心为M．以M为顶点的任意直角的二边与a和b分别交于点A和B．证明点M到直线(AB)的距离与直角的选取无关。

266．求一平面点集，集合的每一点到一矩形各顶点的距离平方和等于已知线段长的平方。

267．求一平面点集，该集合的每一点到互相垂直的二直线距离之和等于已知线段的长。

268．已知矩形$ABCD$．求一点集，它的每一点到该矩形一条对角线两端点距离之和等于它到另一条对角线两端点距离之和。

269．求一点集，其每一点到一等边三角形两顶点距离之平方和等于它到第三个顶点距离的平方。

270．求所有点M的集合，它使得

$$|MA|^2-|MB|^2=k^2,$$

其中A和B是已知两点，k是已知数。

271．已知正方形$ABCD$，$|AB|=a$，求图形

$$\Phi=\{M \mid |MA|^2\cdot|MC|^2+|MB|^2\cdot|MD|^2=a^4\}.$$

272．已知两个点A和$B(A\neq B)$及数$b\in R$，$b>0$．求图形：

(1) $\Phi=\{M \mid |AM|=b|MB|\}$；

(2) $\Phi=\{M \mid |AM|^2+|BM|^2=b^2\}$．

273．过凸四边形每条对角线的中点作另一条对角线的平行线。证明：连接两直线交点与四边形各边中点的线段把该四边形分割成等积图形。

274．已知直线l及其外一点A．求一点集，使其中的每一点到点A的距离与到直线l的距离之平方差等于d^2.

275．求平面点集，使其中的每一点到已知点的距离比到过该点直线的距离大一倍。

276．固定三角形的一个顶点，将其长为c的对边沿直线l滑动。试求该三角形的外接圆之圆心运动所产生的曲线。

277．证明：若四边形各边的平方和等于其对角线的平方和，则该四边形是平行四边形。

278．证明：任意三角形的顶点到其垂心的距离等于外接圆的圆心到该顶点对边距离的二倍。

279．两个角XPY和UQV交成一四边形$ABCD$.证明该四边形二对角线的中点和线段$[PQ]$的中点共线。

280．设三角形ABC不是直角三角形。证明：过二高线垂足的直线与过第三顶点和三角形ABC的外接圆之圆心的直线垂直。

281．设$[AA_0]$、$[BB_0]$、$[CC_0]$是非直角三角形ABC的三条高线。证明三角形ABC的各高线在三角形$A_0B_0C_0$的内角或外角里。

282．过点M向三角形各边引垂线。求点M的集合，它使各垂足共线。

283．在直角ACB的二边上给出了两点A和B，使$|CA|=|CB|$.求点M的集合，它位于该角的内部、并且$[MC]$是角AMB的平分线。

284．设一矩形内接于三角形，矩形两顶点位于三角形底边上，而另两个顶点分别位于三角形的其它两边上。求该矩形对角线交点的集合。

285．已知等边三角形ABC.求点P的集合，使线段$[AP]$、$[BP]$、$[CP]$能作成（1）直角三角形；（2）一顶角为120°的三角形。

286．对标架$(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$给出了三角形各顶点的坐标：$A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$.证明

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{pmatrix}\right|.$$

287. 在三角形 ABC 的两边$[AB]$、$[BC]$上向外作两个正方形$ABMN$，$BCQP$. 用O_1、O_2表示它们的中心。设K是$[AC]$的中点、L是$[MP]$的中点。证明O_1LO_2K是正方形。

288. 根据平行四边形$ABCD$三个顶点的坐标（在标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$下），计算该平行四边形的面积：

(1) $A(3, 1)$，$B(-1, 0)$，$C(2, -1)$；

(2) $A(3, -1)$，$B(2, 1)$，$C(-3, 0)$.

289. 给出了标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$. 三角形ABC之顶点C属于Oy轴。根据该三角形的面积及其二顶点A和B的坐标计算点C的坐标。设：

(1) $A(1, 1)$，$B(-2, 4)$，$S=12$；

(2) $A(3, -1)$，$B(-1, 2)$，$S=16$。

290. 设三角形ABC三高线的垂足为A_0，B_0，C_0，且$|AB|=c$，$|BC|=a$，$|AC|=b$，求三角形ABC和$A_0B_0C_0$的面积之比。

291. 对仿射标架$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$，给出了三角形各顶点的坐标：$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$. 证明：

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{pmatrix}\right|\cdot S_0$$

其中S_0是由线段$\overline{OE_1}\in\vec{e}_1$，$\overline{OE_2}\in\vec{e}_2$作的平行四边形的面积。

292. 已知凸四边形$ABCD$. 证明它的面积是以它各边中点为顶点之四边形面积的二倍。

293. 联接四边形$ABCD$两对边中点的两个线段交于点M. 证明三角形BMC与DMA面积之和等于三角形AMB与CMD面积之和。

294. 已知三角形ABC. 求M点的集合，它使三角形ABM，ACM，BCM等积。

295. 已知三角形ABC. 求M点的集合，其中每一点都使三角形ABM和ACM的面积彼此相等。

296. 求M点的集合，点M属于三角形ABC，并使三角形

ABM的面积比三角形ACM的面积大。

297．点A_0，B_0，C_0以下列比值分三角形ABC的三边：$\lambda_1=(AC, B_0)$，$\lambda_2=(BA, C_0)$，$\lambda_3=(CB, A_0)$ $(\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\neq-1)$．计算三角形$A_0B_0C_0$和$ABC$的面积比。

298．求属于三角形ABC的点M，它使三个三角形ACM、ABM、MBC的面积比为2:3:4（或$m:n:p$）．

299．给出了两个线段$[AB]$和$[CD]$．求点M的集合，它使两个三角形MAB为MCD的面积相等。

300．已知凸四边形$\Phi=ABCD$不是平行四边形。求所有点$M\in\Phi$的集合，它使两个三角形BAM和CDM面积之和等于三角形CBM和DAM面积之和。

301．已知凸四边形$ABCD$的两对角线$[AC]$和$[BD]$交于点O．证明：若$S^2_{BOC}=S_{AOB}\cdot S_{DOC}$，则该四边形的两对边$[AB]$与$[CD]$平行。

302．在直角三角形$A_1A_2A_3$(A_2是直角顶点）的各边上作正方形．各正方形内部与三角形内部不交。设A'_i是在边$[A_jA_k]$(i，j，k不同）上作的正方形之中心。证明：

(1) $|A_iA'_i|=|A'_jA'_k|$，$(A_iA'_i)\perp(A'_jA'_k)$；

(2) 三直线$(A_iA'_i)$，$(A_jA'_j)$，$(A_kA'_k)$属于同一线束。

第三章 平面变换

§1 映 射

303．在平面Π上给出了以 S 为中心的线束$P(S)$、以及直线$d\not\ni S$．证明映射 f：$d\to P(S)$ 按规则：$\forall M\in d\quad f(M)=(SM)\in P(S)$是单射、但不是满射。

304．设直线 l 是两直线 $l_1,l_2(l_1\cap l_2=O)$ 所夹一对对顶角的平分线。证明映射 f：$\Phi=l_1\cup l_2\to l$ 按规则：$\forall M\in\Phi\quad f(M)=M'|M,M'\in d,d\perp l$ 是满射但不是单射。

305．举例说明映射：（1）是满射但不是单射；（2）是单射但不是满射；（3）是双射。

306．举例说明圆周的变换：（1）没有不动点；（2）有两个不动点。

307．证明：存在图形$\Phi=[AB]\setminus\{A,B\}$到直线$(AB)$上的双射 f．

308．在平面Π上给出了开圆 $\Phi=\{M\,|\,|OM|<r\}$；证明存在双射 f：$\Phi\to\Pi$．

309．在平面Π上给出了圆$\gamma=(O,r)$ 和三角形 ABC．证明存在圆 γ 到折线段

$$\gamma'=[AB]\cup[BC]\cup[AC]$$

上的双射 f。

310．在平面Π上给出了两个线段$[AB]$和$[CD]$．证明，线段$[AB]$到线段$[CD]$上的双射 f存在。

311．在平面Π上给出了半圆 γ 和线段$[AB]$．证明：半圆 γ 到线段$[AB]$上的双射存在。

324．证明：奇数个轴对称的合成或是滑动对称、或是轴对称。

325．已知三个合同的圆 ω_1、ω_2、ω_3，并且

$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A_{12}, B_{12}\}$，$\omega_2 \cap \omega_3 = \{A_{23}, B_{23}\}$；

$\omega_3 \cap \omega_1 = \{A_{31}, B_{31}\}$．证明以 $(A_{12}B_{12})$，$(A_{23}B_{23})$，$(A_{31}B_{31})$ 为轴的轴对称之合成是轴对称。作出该对称轴。

326．对标准正交标架 R 给出了点 $S(x_0, y_0)$ 和角 $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$．写出绕点 S、转角 α 的旋转 f 的公式。

327．绕点 $M(2, 1)$ 旋转将点 A 映射成点 B．计算点 B 的坐标。假设(1) $\alpha = 45^\circ$，$A(1, -2)$；(2) $\alpha = 120^\circ$，$A(1, 1)$；(3) $\alpha = 90^\circ$，$A(3, -1)$．

328．计算旋转中心的坐标，该旋转是用下列公式给出的：

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2. \end{cases}$$

329．设直线 l 绕点 M 转角 φ，写出 l 经旋转后的象直线方程。假设

(1) $M(0, 0)$，　$\varphi = \frac{\pi}{2}$，l：$x + y - 2 = 0$；

(2) $M(-2, 1)$，　$\varphi = \frac{\pi}{6}$，l：$x - y + 1 = 0$；

(3) $M(0, -1)$，　$\varphi = \frac{\pi}{4}$，l：$x + 2y = 0$．

330．在由方程 $2x + y - 1 = 0$ 给出的直线 m_1 上取点 $M_1(2, -3)$，而在由方程 $3x - y + 2 = 0$ 给出的直线 m_2 上取点 $M_2(-1, -1)$．写出旋转变换 f 的公式，该变换使 $f(M_1) = M_2$，$f(m_1) = m_2$．

331．已知等边三角形 ABC 各中线交点为 $M(5, 1)$、以及直

线(AB)的方程：$2x-y=0$.写出直线(AC)，(BC)的方程。

332．证明：平面Π关于两点O_1, O_2的对称f_1, f_2之合成是平面的平移。

333．证明：以A, B, C为心的三个中心对称的合成是以D为心的中心对称、并且$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

334．证明：关于点O的对称并就向量$\vec{a}$的平移之合成是关于这样点O'的面对称，它使$\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{2}\vec{a}$.

335．证明：平面关于诸点$O_i(i=1, 2, \cdots, n)$的各对称f_i之合成f，当n是偶数时；它是平面Π就向量

$$\vec{a}=2(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_3O_4}+\cdots+\overrightarrow{O_{n-3}O_{n-2}}+\overrightarrow{O_{n-1}O_n})$$

的平移；而当n是奇数时，它是平面Π关于点O'的对称，其中O'适合

$$\overrightarrow{O_1O'}=2(\overrightarrow{O_2O_3}+\cdots+\overrightarrow{O_{n-3}O_{n-2}}+\overrightarrow{O_{n-1}O_n}).$$

336．证明旋转f由一对应点对A、$B=f(A)$及转角唯一确定。

337．证明：当旋转射线时，射线方向与其象方向间的夹角就是转角。

338．证明：以不同点为心、转角α与β的旋转之合成或是旋转：当$\alpha+\beta\neq 360°$时，或是平移：当$\alpha+\beta=360°$时$(0°\leqslant\alpha<360°,\ 0°\leqslant\beta<360°)$.

339．证明：要使两个旋转之合成是可换的，必要且充分的条件是两个旋转中心重合。

340．在平面上已知奇数个点$O_i(i=1, 2, \cdots, n)$及点$M\neq O_i$.逐次作M关于O_i的对称点，再逐次作上面所得的点关于O_i的对称点，设得到的点是$\tilde{M}$.证明$\tilde{M}$与M重合。

341．设点M是三角形ABC平面上的一点，而A', B', C'是点M关于三角形ABC各边$[BC]$,$[AC]$,$[AB]$中点A_0, B_0, C_0的对称点。证明：存在一个中心对称f，把三角形ABC映射成三角形$A'B'C'$.

342. 过正三角形的中心引两条成60°角的直线，证明：这两条直线与该三角形的边相交成两条相等的线段。

343.* 正 n 边形 Φ_2 的各顶点分别属于正 n 边形 Φ_1 的各边。证明：（1）多边形 Φ_2 的每个顶点 B_i 以同一比值分割边$[A_iA_{i+1}]\ni B_i$，其中 A_i 是 Φ_1 的顶点；（2）多边形 Φ_1、Φ_2 的对称中心相重合。

344. 已知圆内接正 $(2n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 证明：关于顶点$A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 的中心对称的合成，是A_1、A_{2n+1} 顶点处对圆所作两条切线之交点的心对称。

345. 证明：把点A映射成点$B(A\neq B)$的所有旋转中心的集合是直线。

346. 证明，若绕点 A 转角 α、绕点B转角 β 的旋转合成是绕点 C 的旋转，而绕点B 转角 β、绕点A转角 α 的旋转合成是绕点D的旋转$(A\neq B)$，则点C和点D关于直线(AB)对称。

347.* 已知两个不同中心的旋转。作出这两个旋转合成的不动点。

348. 写出由轴 l 及向量 $\vec{a}$ 所给出的滑动对称公式。假设

（1）l：$x-2=0$， $\vec{a}(0,3)$；

（2）l：$x+y-3=0$， $\vec{a}(-1,1)$；

（3）l：$y+5=0$， $\vec{a}(2,0)$；

（4）l：$2x-y+1=0$， $\vec{a}(2,4)$.

349. 写出在由轴 l 及向量 $\vec{a}$所给出的滑动对称下点A的象的坐标。假设

（1）$A(2,1)$， l：$x+5=0$， $\vec{a}(0,2)$；

（2）$A(0,-3)$， l：$x+y+3=0$， $\vec{a}(-2,2)$；

（3）$A(0,0)$， l：$x-2y+1=0$， $\vec{a}(6,3)$.

350. 写出在由轴 l 及向量 $\vec{a}$ 所给出的滑动对称下直线 m 的象的方程。假设

（1）l：$x+2=0$， $\vec{a}(0,3)$， m：$x-3y+1=0$；

---

* 原题有误已改正——译者

（2）l: $x-y+1=0$，　$\vec{a}(5,5)$，　　m: $x+y=0$；

（3）l: $x+2y=0$，　　$\vec{a}(-2,1)$，　m: $x-2y+1=0$.

351．求由公式：$x'=\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y+4$, $y'=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y$ 所给出的滑动对称的不动直线方程。

352．写出位移公式，该位移是以 $x=0$，$y=0$，$x+y-1=0$ 为轴的三个轴对称的合成。

353．证明：两个不同平行轴的滑动对称的合成是平移。

354．证明：两个垂直轴的滑动对称的合成是中心对称。

355．证明：两个相交轴的滑动对称的合成是旋转。再作出该旋转中心。

356．证明：滑动对称 σ 可以表成下列合成：

（1）$\sigma=a\circ A$，其中 a 是关于直线 a 的反射，A是关于点A的反射，并且点A不属于直线 a。

（2）$\sigma=u\circ\vec{a}$，其中 u 是关于直线 u 的反射、$\vec{a}$是平移，且该向量$\vec{a}\parallel u$.

（3）$\sigma=c\circ b\circ a$，其中a,b,c是关于直线 a,b,c的反射，且它们不属于同一个线束。

357．已知三角形ABC，证明：以(AB)和(BC)为轴、并按照向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$分别平移的两个滑动对称的合成，是绕三角形ABC的外接圆心之旋转，并求该旋转的转角。

358．证明：平面内关于属于同一线束的三条直线的反射的合成，是关于该线束中的一条直线的反射。

359．已知三角形ABC，点A_1，B_1，C_1是高线的垂足。证明：直线(A_1C_1)是滑动对称 $\sigma=(CA)\circ(BC)\circ(AB)$ 的轴，其中 (AB) 是关于直线(AB)的反射，(BC)是关于直线 (BC) 的反射，(CA) 是关于直线(CA)的反射。

360．设点 A，B 位于直线 l 的同侧。证明在直线 l 上存在这样的点M，使直线(AM)，(BM)与直线 l 的夹角相等。

361．在平面Π上给出了两个等长线段$[AB]$和$[A'B']$.证

明：有唯一的第一(二)类位移f，使$f(A)=A'$, $f(B)=B'$.

362. 在平面Π上给出了两个等长线段$[AB]$,$[A'B']$及点M和直线m. 所给线段在何种位置使有下列变换、而使$f|f(A)=A'$, $f(B)=B'$:

(1) 平移（求它）；

(2) 旋转（求中心及转角）；

(3) 轴对称（求轴）；

(4) 滑动对称（求轴及向量）。

在每种情况作出点$M'=f(M)$和直线$m'=f(m)$.

363. 证明：如果圆关于位移仍变成自己，则其圆心是该位移不动点。

364. 已知位于不同二平行直线上的两个相等线段$[AB]$, $[A_1B_1]$. 用何种位移能把其中的一个变成另一个？讨论所有可能的情况。

365. 叙述映射成自身的各种位移的类型。

(1) 平面Π内以O为中心的线束$P(O)$；

(2) 平行于l的线束$P(l)$；

(2) 平面Π内、过两个定点$A,B(A\neq B)$的圆束。

366. 对标准正交标架R, 用下列公式给出了平面Π的变换f:

$$(1)\ x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2},\quad y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(2)\ x'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{8}{5},\quad y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}.$$

证明f是位移，再确定它的类型并求不动点。

367. 已知二相等线段$[AB]$和$[A_1B_1]$, 如果$A(3,4)$, $B(0,0)$, $A_1(0,0)$, $B_1(5,0)$, 写出把A变成A_1、B变成B_1的位移公式。

368. 给出了诸点的坐标$A(\sqrt{3},1)$, $B(0,2)$, $A'(2,\sqrt{3}-2)$, $B'(0,\sqrt{3}-2)$. 已知：$f(A)=A'$, $f(B)=B'$. 写出第一类位移的公式。

369. 若已知诸点 $(0, 1)$、$(1, 0)$、$(1, 1)$ 的象分别属于各直线 $y=0$，$x=0$，$x+y-1=0$。写出第一类和第二类位移的公式。

370. 设有这样的一点 A，使位移 f 实现：$f(A)=A_1$，$f(A_1)=A$，$A\neq A_1$，证明对任意点 X 有 $f(X)=X_1$，$f(X_1)=X$。

371. 在 Π 平面上给出了两个标准正交标架：$R=(O, A_1, A_2)$ 和 $R'=(O', A_1', A_2')$。就下列各种情况来确定位移 $f|f(R)=R'$ 的类型：

（1）$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{O'A_1'}$，$\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{O'A_2'}$；

（2）$\overrightarrow{OA_1}=-\overrightarrow{O'A_1'}$，$\overrightarrow{OA_2}=-\overrightarrow{O'A_2'}$；

（3）二标架有一致定向，$\alpha=(\widehat{\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{O'A_1'}})\neq 0$；

（4）二标架有相反向定，$O=O'$；

（5）二标架有相反定向，$O\neq O'$，$A_1, A_1'\in(OO')$（或 $A_2, A_2'\in(OO')$）：

(a) $d\perp(\overrightarrow{OO'})$；($b$) d 不垂直 (OO')，这里 d 是过线段 $[OO']$ 和 $[A_1A_1']$（或 $[A_2A_2']$）中点的直线。

372. 平面绕点 $S(2, 3)$ 转角 α，而使 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，关于此旋转直线 l：$x+2y-3=0$ 变成哪条直线？

373. 给出了三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 顶点的坐标：$A(2, -3)$，$B(5, 1)$，$C(0, 1)$，$A'(-3, 1)$，$B'(1, 4)$，$C'\left(-\frac{19}{5}, \frac{27}{5}\right)$。证明这两个三角形合同。再求把 (A, B, C) 变到 (A', B', C') 的运动公式，并确定该运动的类型。

374. 设给出了对称轴方程：$Ax+By+C=0$，写出轴对称变换公式。

375. 已知正三角形 ABC 及点 A_0, B_0, C_0，使比值 $(AB, C_0)=(BC, A_0)=(CA, B_0)=\lambda\neq 1$。证明：

（1）三角形 $A_0B_0C_0$ 也是正三角形。

（2）各边位于直线 (AA_0)，(BB_0)，(CC_0) 上的三角形 DEF 是正三角形。

（3）三角形ABC，$A_0B_0C_0$，DEF之重心重合。

376．证明三角形高线之交点M关于各边所在直线的对称点位于该三角形的外接圆上。

§3 相 似

377．在直线l上给出了两对点A与B及A_1与B_1．画出位似中心，它使点A变成点A_1，而点B变成点B_1．

378．就标架R给出了各点坐标：$A(2,1)$，$B(3,-2)$，$C(1,0)$，$A'(-1,-5)$，$B'(-3,1)$，$C'(1,-3)$．证明三角形ABC和$A'B'C'$位似，再写出位似$h|h(\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$的公式。

379．求已知两线段$[AB]$和$[A'B']$位似的充要条件。

380．证明：两个非合同三角形ABC和$A'B'C'$位似，当且仅当它们的对应边平行。

381．证明：平面Π的两条闭折线$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_nA_1$和$A'_1A'_2\cdots A'_{n-1}A'_nA'_1$位似，当且仅当

$k\in R$, $k\neq 0$, $|\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}=k\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$.

$\overrightarrow{A'_nA'_1}=k\overrightarrow{A_nA_1}$.

382．在平面Π上给出了闭折线$A_1A_2A_3A_4A_1$。设M_1，M_2，M_3，M_4分别是三角形$A_2A_3A_4$，$A_3A_4A_1$，$A_4A_1A_2$，$A_1A_2A_3$的重心。证明：闭折线$M_1M_2M_3M_4M_1$与已知闭折线位似且位似系数$k=-\frac{1}{3}$．

383．设两个正方形有公共中心，而它们的边分别平行。什么样的位似才能把其中的一个正方形映射成另一个？

384．一个四边形的边及对角线和另一个四边形的边和对角线分别平行。据此能否推出这两个四边形位似？

385．证明：若位似三角形ABC和$A'B'C'$的位似中心与其中一个三角形的重心重合，则它也将是另一个三角形的重心。

386．证明：用两相异的位似能把两个非合同圆中的一个变

成另一个，并且这两个位似系数之和等于零。

387．设二圆相交于点A和B．证明：若M和N是该二圆的位似中心，则$\widehat{MAN}=\widehat{MBN}=90^\circ$．

388．证明：以A为中心、k_1为系数的位似和以B为中心、k_2为系数的位似的合成是

（1）位似，当$k_1\cdot k_2\neq 1$时；

（2）平移，当$A\neq B$及$k_1\cdot k_2=1$时；

（3）恒等变换，当$A=B$及$k_1\cdot k_2=1$时。

389．证明：以不同中心及不同系数k_1,k_2的两个位似，当且仅当

$$k_1\neq k_2$$

时，有唯一的公共对应点对。

390．证明：若以中心为A的位似和以中心为B的位似之合成是以中心为C的位似，则点A、B、C共线。

391．已知三个两两互不合同的圆。证明每两个圆的正位似中心共线。

392．已知三个位似，其系数互不相同且中心不重合。证明在给定的位似下，有唯一直线具有相同的象。

393．已知三角形ABC和诸点A_1，B_1，C_1、A_2,B_2，C_2，而使$(AB,C_1)=(BC,A_1)=(CA,B_1)=k$，$(A_1B_1,C_2)=(B_1C_1,A_2)=(C_1A_1,B_2)=\frac{1}{k}$．证明三角形$ABC$和$A_2B_2C_2$位似，并求将三角形$ABC$变换成三角形$A_2B_2C_2$的位似中心及系数。

394．已知以k为系数的相似变换，使得$A\mapsto A_1\mapsto A_2$，$B\mapsto B_1\mapsto B_2$．求线段$[AB]$，$[A_1B_1]$，$[A_2B_2]$长之间的相依关系。

395．在平面Π内给出了两个标准正交标架：$R=(O,A_1,A_2)$，$R'=(O',A_1',A_2')$且具有条件：

$|\overrightarrow{O'A_1'}|=k|\overrightarrow{OA_1}|$，$|\overrightarrow{O'A_2'}|=k|\overrightarrow{OA_2}|$，$\overrightarrow{O'A_1'}\cdot\overrightarrow{O'A_2'}=0$ $(k>0)$．证明：把标架R里的点$M(x,y)$变成标架R'里的点$M'(x,y)$的映射f：$\Pi\to\Pi$，是以k为系数的相似。

425．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下，如果已知系数k和轴的方程$y=0$，写出错切公式。

426．证明：两个相交轴的二斜对称的合成是中心仿射变换。在什么情况下它有对称中心？

427．在什么情况下两斜对称的合成是平移？

428．证明：具有平行轴的两个错切变换的合成没有不动点、或有无限多个。

429．何种变换是错切和平行于错切轴的平移之合成？

430．写出把已知三角形变成自己的全部仿射变换。

431．已知平行四边形$ABCD$．求以(AB)，(BC)，(CD)，(DA)为轴的四个错切的合成，如果这些错切分别使$C\mapsto D$，$D\mapsto A$，$A\mapsto B$，$B\mapsto C$。

432．过平行四边形中心引两条直线，使二直线将它分成四个等积的四角形。问此题有多少解法？

433．在仿射坐标系下，举出全部等仿射变换的解析写法。

434．求等仿射变换

$$x'=9x+4y-2$$
$$y'=2x+y+1$$

的不变线束。

435．三条直线a,b,c交于点M，而另三条直线a_1,b_1,c_1交于点M_1．是否存在使$a\mapsto a_1$，$b\mapsto b_1$，$c\mapsto c_1$的等仿射变换？

436．已知两条平行直线a,b和它们的截线c以及另外的三条直线a_1,b_1,c_1．说明能否确定等仿射变换使a,b,c的象分别是a_1,b_1,c_1。

437．证明：错切和斜对称的合成是滑动对称或斜对称。

438．证明：任何等仿射变换是不多于三个斜对称的合成。

439．两个四边形怎样才能仿射等价？

440．设一仿射变换把点$A(1,2)$，$B(3,-1)$，$C(-1,1)$变成点$A'(-1,10)$，$B'(6,6)$，$C'(-4,6)$，写出该仿射变换公式。

441．一仿射变换把点$A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(1,-1)$变成

ABC 的二边$[AB]$,$[BC]$，而点 M_2,N_2 分该二边的比值为$(AB, M_2)=(BC, N_2)=\lambda_2$. 证明：二直线 (M_1N_1)与 (M_2N_2)的交点 P 分别按比值 $(M_1N_1, P)=\lambda_2$，$(M_2N_2, P)=\lambda_1$ 分线段 $[M_1N_1]$和$[M_2N_2]$.

451. 在标准正交标架下用公式

$$x'=C_{11}x+C_{12}y+x_0,$$
$$y'=C_{21}x+C_{22}y+y_0,$$

其中$\triangle=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 给出了任意仿射变换 f. 证明有等式成立：$S'=|\triangle|\cdot S$，这里 S 是三角形ABC 的面积，而 S' 是在f 变换下与其相对应的三角形 $A'B'C'$ 的面积。

452. 证明：对仿射变换两三角形（多角形）的面积比，等于其对应的两三角形(多角形)的面积比。

453. 设平行四边形 $ABCD$ 的面积等于 Q .已知点A_1 ,B_1, C_1, D_1 使比值$(AB, D_1)=(BC, A_1)=(CD, B_1)=(DA, C_1)=\lambda$. 计算由各直线$(AA_1)$, (BB_1), (CC_1) (DD_1) 相交而成的四边形 $A_0B_0C_0D_0$ 的面积 S_0. 讨论当$\lambda=1$的情况。

454. 在标准正交标架 $R=(O, A_1, A_2)$ 下给出了三角形 ABC 各边所在直线方程 l_i：$A_ix+B_iy+C_i=0$ $(i=1, 2, 3)$. 求该三角形的面积 S.

455. 设点 A_0、B_0、C_0 按如下比值分三角形 ABC 的各边：$\lambda_1=(AC, B_0)$, $\lambda_2=(BA, C_0)$, $\lambda_3=(CB, A_0)$ $(\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\neq -1$, $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\neq 1)$. 求三角形 $A'B'C'$ 的面积 S' 和三角形 ABC 的面积S的比。其中三角形 $A'B'C'$ 是由三直线(AA_0), (BB_0), (CC_0) 所确定的。

456. 已知三角形ABC和点A_0、B_0, 使比值$(AA_0, C)=(BB_0, C)=\dfrac{|AC|}{|BC|}$. 证明：平行四边形 A_0CBM 与 B_0CAN 的面积之和等于平行四边形 $ABPQ$ 的面积。其中 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CL}$，$L$ 是平行四边形A_0CB_0L 的顶点。

457. 证明：平面Π的、非相似的任何仿射变换 f，使得过

平面Π上的每一点有唯一的一对垂直直线，经 f 变换仍变成一对垂直直线。

458．证明：平面Π的非位移的任意仿射变换 f，能表示成位移和关于一对互相垂直直线的两个压缩之合成。

459．证明：非相似的、每个平面的仿射变换，是平面的相似和斜压缩、或错切的合成。

460．在平面Π上给出了两条相交于点 L 的直线 l_1，l_2．证明：平行于 l_2，以 l_1 为轴 λ 为系数的斜压缩 f_1，和平行于 l_1，以 l_2 为轴和同样系数的压缩 f_2 的合成 f 是以 L 为中心、λ 为系数的相似。

461．在给定的一条直线上，求在给定的平面仿射变换下成对应的点对。

462．在给定的仿射变换下，过已知点作两条相对应的直线。特别是当这变换是位移、相似时作其图。

463．证明：仿射变换将三角形的重心变成对应三角形的重心。

464．证明：如果仿射变换把平行线束变成另一个，则这两线束的对应直线的交点属于一条直线。

465．求一条直线，它在给定的仿射变换下变成与它平行的直线（如果这样的直线存在）。

466．由三个对应点对：$A\mapsto A_1$，$B\mapsto B_1$，$C\mapsto C_1$ 给出了一个仿射变换，并且点 A, A_1，B, B_1 属于一条直线。求该变换的不动点（如果它存在）。

467．证明：仿射变换能由对应元素对 (a, a_1)，(b, b_1)，(M, M_1) 在如下条件下给出：直线 a 与直线 b 相交、而直线 a_1 与直线 b_1 相交，并且 $M\neq a\cap b$，$M_1\neq a_1\cap b_1$．

468．由两条自身不动的直线及（1）一个一般位置的对应点对；（2）一个一般位置的对应直线对，能否确定一仿射变换？

469．证明：如果存在一仿射变换使 $D\mapsto A, A\mapsto B, B\mapsto C$，

$C\mapsto D$且$ABCD$是平行四边形时，则对任意点D_1有：$D_1\mapsto A_1$，$A_1\mapsto B_1$，$B_1\mapsto C_1$，$C_1\mapsto D_1$，$A_1B_1C_1D_1$也是平行四边形（如果它存在）。并作出该变换的不动点。

470．证明：在一般情况下，两个仿射变换仅有一个公共对应点对。作出该点对。

471．在一般情况下，两个仿射变换能有多少公共对应直线对？

472．证明：如果两个仿射变换有两个公共对应点对，则这样的点对构成无限集合。

473．证明，把平行直线对a，b变成另一平行直线对a_1，b_1（$a\nparallel a_1$）的所有仿射变换的不动点集合是一条直线。

474．就一仿射变换使$A\mapsto A_1\mapsto A_2$，$B\mapsto B_1\mapsto B_2$，$C\mapsto C_1\mapsto C_2$．求三角形ABC、$A_1B_1C_1$、$A_2B_2C_2$三者面积之间的相依关系。

475．就标架R，写出平面口的仿射变换f的公式，它有唯一的不动点$M_0(x_0, y_0)$及唯一的不动直线l：$Ax+By+C=0$；$M_0\notin l$。

476．证明：如果一仿射变换使$A\mapsto B$，$B\mapsto C$，$C\mapsto D$，$D\mapsto E$，$E\mapsto A$，则五边形$ABCDE$的每条对角线平行于其一边。作该变换的不动点。

§5 变换群

477．写出全部二阶位移群（有限群元素的个数称作群的阶数）。

478．求（平面上）二垂直直线的对称（自重合）群的阶数。

479．指出两个四阶、六阶位移的不同构群。

480．证明，关于向量$\vec{a}$（$\vec{a}\neq\vec{0}$）共线的各向量的全部平移构成群。

481．证明：有公共不动点的全部位移构成群。它是否是可换的？

496．举例：（1）等仿射变换群的有限子群；（2）等仿射变换群的可换子群。

497．证明：中心对称是位移群关于平移子群的陪集。

498．证明：具有平行轴的全部平面的错切及平行于轴方向的全部平移构成一个群。

499．证明：仿射变换群是其中心仿射变换子群和平移子群这两个子群的直积。

500．证明：中心仿射变换群是其中心仿射变换子群和位似子群这两个子群的直积。

501．证明全部压缩和具有公共轴的全部错切的集合构成一个群。

502．证明：所有具有公共轴的斜对称和错切的集合构成一个群。

503．证明：具有公共方向的全部压缩和有同样方向的平移的集合构成一个群。

§6 杂 题

504．证明：以a为轴的对称和以A为中心的对称是可换的，当且仅当$A\in a$.

505．设平行四边形$A'B'C'D'$的对顶点位于平行四边形$ABCD$二对边所在的直线上。证明：这两个平行四边形的对称中心重合。

506．以平行四边形$ABCD$的各边向其外部作正三角形ABM, BCN, CDP, DAQ. 证明线段$[MP]$和$[NQ]$有公共中点。

507．设一六边形的对边相等且平行。证明连接六边形对顶点的三条对角线交于一点。

508．设点B位于点A和点C之间。线段$[AB]$,$[BC]$是等边三角形ABM, BCN的边，其顶点M和N位于(AB)同侧，而点E, F是线段$[AN]$, $[MC]$的中点。证明三角形BEF是正的。

509．三个合同圆周仅有一个公共点，证明过已知圆周的三个二重交点的圆周与已知圆周合同。

510．在平行四边形 $ABCD$ 的各边上向其外部作正方形。证明：这四个正方形的中心是一正方形的顶点。

511．证明：等腰三角形 ABC 底边$[AB]$上的任意点 M，到二腰所在直线(AC)，(CB)距离之和是一常数。

512．已知三角形 ABC，$|AC|>|AB|$．在边$[AC]$上取一点 D，使$|CD|=|AB|$．过线段$[AD]$和$[BC]$之中点 M 与 K 引一条直线。证明：$\widehat{CMK}=\frac{1}{2}\widehat{CAB}$．

513．三角形 ABC 的内切圆之圆心为 M．直线 (AM) 和过二边$[AB]$，$[BC]$ 与该圆之切点的直线交于点 D．证明：
$(CD)\perp(AD)$．

514．已知II平面绕点 M 转角为 α 的旋转和点 S．求这样的点 X 的集合，它使三点 X，X_1，S 共线。这里 X_1 是点 X 关于已知旋转的象。

515．过三角形 ABC 各边之中点 A_0、B_0、C_0 引平行其内对角之平分线的直线 a_0，b_0，c_0．证明：

（1）直线 a_0，b_0，c_0 过同一点 S．

（2）点 S 和三角形中线的交点 M 及其内切圆之圆心 N 共线，并且$(SN, M)=1:2$．

516．设 M_3，M_4，M_5 分别是三角形 $A_1A_2A_3$，$A_1A_2A_4$，$A_1A_2A_5$ 的中线之交点。证明：点 A_3，A_4，A_5 共线，当且仅当 M_3，M_4，M_5 共线，并且$(A_3A_4, A_5)=(M_3M_4, M_5)$．

517．证明：任意三角形 ABC 其边的三中点、高线的三垂足及垂心至各顶点线段的三中点共圆（九点圆——欧拉（Euler）圆）。其圆心是端点为垂心 H 和三角形外接圆之圆心 O 所成线段的中点$(H\neq O)$．

518．三角形两个顶点固定，而第三个顶点沿某曲线 γ 运动。证明三角形重心画出的这条曲线和已知曲线 γ 相似。

519．已知圆周 γ 及点 $A\in\gamma$. 以点 A 为公共端点的、圆周 γ 的各弦之中点组成的 Φ 是什么样的图形？

520．证明：异于运动的第二类相似有一个不动点、并且过该点有两条互相垂直的直线。

521．已知以点 O 为圆心、r 为半径的圆周 γ 及一点 $A(A\neq O, A\notin\gamma)$. 设 N 是圆周 γ 上的一点并在 γ 上转动一周时，求由直线 (AN) 和角 AON 之平分线交点所构成的图形 Φ.

522．当正方形 $ABCD$ 所在平面绕其中心 O 转角 α 时 ($\alpha\neq 180°$)，得到正方形 $A_1B_1C_1D_1$. 证明：点 $P=(AB)\cap(A_1B_1)$、$Q=(BC)\cap(B_1C_1)$，$R=(CD)\cap(C_1D_1)$，$S=(DA)\cap(D_1A_1)$ 是正方形 $PQRS$ 的顶点。计算比值 $|PQ|:|AB|$.

523．已知两个相似平行四边形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$. 其中

$$|AB|=m,\quad |AD|=n,\quad |A_1B_1|=m_1,\quad |A_1D_1|=n_1,$$
$$|AC|=p,\quad |BD|=q,\quad |A_1C_1|=p_1,\quad |B_1D_1|=q_1.$$

证明：$m\cdot m_1+n\cdot n_1=\frac{1}{2}(p\cdot p_1+q\cdot q_1)$.

524．设 H_1, H_2, H_3 是任意三角形 ABC 之垂心关于其各边所在直线的对称点。证明：H_1, H_2, H_3 位于 ABC 的外接圆上。

525．作直角三角形 ABC ($\hat{C}=90°$) 之高线 $[CD]$. 证明三角形 ADC 和 CDB 的两中线 $[AA_1]$ 与 $[CC_1]$ 垂直。

526．设点 M 是等腰三角形 ABC 之底边 $[AB]$ 的中点。证明：若点 N 是由点 M 向 $[BC]$ 边引之垂线 $[MP]$ 的中点，则 $[CN]\perp[AP]$.

527．两圆周 ω 和 ω_1 相交于点 A 和 B. 过点 $X\in\omega$ 引直线 (AX) 和 (BX)，该二直线与圆周 ω_1 相交于点 X_1 和 X_2. 证明：弦 $[X_1X_2]$ 的长和点 X 的选取无关。

528．四边形 $ABCD$ 的外接圆之圆心为 O. 将 (ABC) 平面绕点 O 转角 α ($\alpha\neq 180°$)，该四边形变成四边形 $A_1B_1C_1D_1$. 证明：诸点 $P=(AB)\cap(A_1B_1)$，$Q=(BC)\cap(B_1C_1)$，$R=(CD)\cap(C_1D_1)$，$S=(DA)\cap(D_1A_1)$ 是一平行四边形的顶点。

529. 已知四条直线，两两相交成六个点。证明各边在所给直线上的四个三角形的外接圆相交于一点。

530. 已知点O和在区间$[0, +\infty)$取正值的函数$\varphi(\rho)$。将按照规则

$$f(M) = M' \mid \overrightarrow{OM'} = \varphi(\rho)\overrightarrow{OM}, \text{其中 } \rho = |\overrightarrow{OM}|$$

进行的平面变换f称作以O为中心、$\varphi(\rho)$为系数的广义位似。对此变换把以O为始点的射线以及公共圆心为O的同心圆族都变成其本身（对通常的位似为$\varphi(\rho) = k = \text{const}$）。在以$O$为中心、$\varphi(\rho)$为系数的广义位似的变换下，求直线$d \not\ni O$的象。

531. 在以k为压缩系数、纵轴为方向将平面对曲线$y = 2^x$压缩时，求横轴的象。

532. 三点A_1、B_1、C_1将三角形ABC的各边$[BC]$，$[CA]$，$[AB]$分成等比：$(BC, A_1) = (CA, B_1) = (AB, C_1) = k$。证明：按照诸向量$\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{BB_1}$、$\overrightarrow{CC_1}$的平移之合成是恒等变换。

533. 在一六边形里，其对边两两平行。证明：过三对边中点的三直线属于一个线束。

534. 设三点A_1，B_1，C_1分三角形ABC各边$[BC]$，$[CA]$，$[AB]$成等比。证明：三角形ABC和$A_1B_1C_1$的重心重合。叙述其逆命题并证明它的真实性。

535. 仿射变换能否把任意四边形变成对角线互相垂直且相等的四边形？

536. 已知平行四边形$ABCD$。两条直线p和q平行于平行四边形的两组对边，且与各边的交点是：

$M = p \cap [BC]$，$K = p \cap [DA]$，$L = q \cap [AB]$，$N = q \cap [DC]$。证明三直线(LM)，(KN)，(AC)属于一个线束。

537. 五边形的四条对角线分别平行它的四条边。证明第五条对角线必平行其第五条边。

538. 设过五边形$ABCDE$的顶点A, B, C, D及其对边中点A_1，B_1，C_1，D_1的诸直线相交于点S。证明：直线(EE_1)（E_1是$[BC]$边之中点）也通过点S。

第四章　二次曲线

§1　椭　　圆

541．写出椭圆的标准方程。设它的长轴等于$2a$，而二焦点到二顶点的距离是长轴的$\frac{1}{5}$.

542．证明：若对点$M(x_0, y_0)$有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1,$$

则过点M的任何直线与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$有两个交点。逆之亦真．

543．设直线l在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下的方程是$x+5y+4=0$，在直线l上，求到两点$A(-3, 0)$和$B(5, 0)$距离之和等于10的点。

544．就标架$(O,\vec{i},\vec{j})$给出了直线d：$4x+3y+6=0$和点$F(-1, 3)$，它们分别是椭圆的准线和相对应的焦点。写出第二条准线方程并求与它相对应焦点的坐标。假设椭圆的长半轴$a=6$．

545．设点$A(2, 2)$和$C(4, 6)$（对标架$(O,\vec{i},\vec{j})$）是椭圆的相对顶点。确定椭圆的另外两个顶点B和D的坐标及两焦点的坐标。假设轴$|BD|=4\sqrt{5}$．

546　在平面Π上，求按定比$\lambda(\lambda^2\neq 1)$分圆周γ的诸平行弦的所有点组成的图形Φ.

547．就标架$(O,\vec{i},\vec{j})$给出了椭圆γ的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

求一椭圆的方程，它与椭圆 γ 相切于焦轴的两对称点处。假设这两点的横坐标等于 $x_0 \neq \pm a$。

548．求椭圆 γ 的这样的全部弦之中点组成的图形。各弦是属于过已知点 M_0 的各条直线的。

549．就标架 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 给出了椭圆方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

和点 $A(-2, 1)$，写出过点 A 且被点 A 平分的弦所在直线方程。

550．证明：对每个椭圆的位于共轭直径上的弦长之平方和是个常数。

551．计算平行四边形的面积，该平行四边形的对角线是属于椭圆之共轭直径的两条弦。

552．求椭圆的一焦点到其二平行切线距离的乘积。

553．证明：

（1）椭圆的一焦点关于其切线的对称点，位于过切点和另一焦点的直线上，并且该点至另一焦点的距离等于长轴。

（2）过椭圆焦点向其切线引垂线，其垂足至椭圆中心的距离等于半长轴。

利用性质（1），指出过它外部已知点作椭圆切线的方法。

554．求椭圆焦点在其所有可能的切线上正射影构成的图形 Φ.

555．求由椭圆焦点关于其所有切线对称点构成的图形 Φ.

556．就标架 $(O, \vec{i}, \vec{j})$、用方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

给出了一椭圆。求含该椭圆内接正方形各边的直线方程。

557．设一椭圆二半轴为 a 和 b，该椭圆之二弦过一焦点且平行其两条共轭直径。求此二弦长之和。

558．切点为 M_0、M_0' 的椭圆 γ 之二切线交于点 T．证明：二线段 $[TM_0]$，$[TM_0']$ 于焦点处张同样的角。

559. 求由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的各弦之中点构成的图形，各弦的两端点是共轭直径的端点。

560. 设A，B，C是椭圆γ的三个不同点，并且点B和C属于一条直径。证明，直线(AB)和(AC)的方向关于椭圆γ共轭。

561. 设三角形ABC与$A'B'C'$的各边相交，使诸交点把三角形ABC的每条边分成三个相等部分。证明：已知两三角形的全部顶点属于一个椭圆，而两三角形的所有交点也属于一个椭圆。

562. 设点A属于椭圆γ。证明：在椭圆γ上存在两点B、C，使三角形ABC中线的交点与椭圆γ的中心相重合。

563. 证明：由椭圆共轭半直径对作成的平行四边形的面积彼此相等，并且等于用椭圆二半轴作成的长方形的面积。

564. 设点O是四边形$ABCD$内切椭圆γ的中心。证明：

$$S_{OAB}+S_{OCD}=S_{OBC}+S_{OAD}.$$

565. 设在三角形ABC的各边上给出了各点A_1，$A_2\in[BC]$，B_1，$B_2\in[AC]$，C_1，$C_2\in[AB]$，以及$(BA_2, A_1)=(CA_1, A_2)=(CB_2, B_1)=(AB_1, B_2)=(AC_2, C_1)=(BC_1, C_2)$。证明：诸点$A_1$，$A_2$，$B_1$，$B_2$，$C_1$，$C_2$属于一个椭圆，该椭圆之中心与三角形$ABC$三中线的交点相重合。

566. 过椭圆与共轭直径的交点向椭圆γ引切线。求由这些切线的交点H组成的图形Φ。

567. 证明：

（1）设l是过椭圆γ一点M_0的直线。l是椭圆γ的切线，当且仅当它的方向与过切点的直径方向共轭；

（2）椭圆γ的两条切线平行，当且仅当过它们切点的直线是椭圆γ的直径；

（3）各边与椭圆相切的平行四边形的对角线属于共轭直径。

568. 在标准正交标架下给出了椭圆方程：

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1.$$

求交角为$\frac{\pi}{4}$的两个共轭直径的方向。

569．在标准正交标架下给出了椭圆的标准方程。求两条共轭直径的交角。假设其中一条的角系数是k.

570．证明：椭圆的内接平行四边形相邻二边的方向是共轭的。

571．给出了椭圆γ的标准方程及点$M_0(x_0, y_0)\in\gamma$.证明：与过点M_0的直径相共轭的直径，通过这样的一点$M_1(x_1, y_1)\in\gamma$，使得

$$\frac{x_1}{a}=\mp\frac{y_0}{b},\quad \frac{y_1}{b}=\pm\frac{x_0}{a}.$$

572．求椭圆的离心率，设其二焦点间的距离是二轴长的算术平均值。

573．写出具有相同二焦点F_1，F_2的椭圆集合的方程。

574．确定各点$M_1(1, 2)$、$M_2(6, 1)$，$M_3\left(\sqrt{3},\ 5\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$关于椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$的位置。

575．证明椭圆内接矩形的各边平行它的两轴。

576．写出平行于直线$x+y-1=0$的、椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的切线方程。

577．证明：三角形的内切椭圆有最大的面积，是与三角形各边中点相切的那个椭圆。

578．证明：过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$长轴的两个顶点$A$，$B$所引的两条切线，被椭圆其它切线截得的两线段$[AM]$，$[BN]$，它们长之积等于$b^2$.

579．平面图形Φ在本身的平面移动，使图形上的两点A，B沿两条相交直线l和m移动。证明：图形Φ的异于A，B的点画出椭圆。

§2 双曲线

580．对标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$给出了双曲线方程：

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

求其渐近线与准线交点的坐标。

581．对标架$R=(O, \vec{i}, \vec{j})$给出了椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$和双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．选取两个新坐标系：$R'=(A, \vec{i}, \vec{j})$和$R''=(B, \vec{i}, \vec{j})$，其中$A(-a, 0)$，$B(a, 0)$．对$R'$坐标系求椭圆方程、对$R''$坐标系求双曲线方程。

582．已知线段$[AB]$的长为$2a$．求图形$F=\{M \mid |\widehat{MAB}-\widehat{MBA}|=\frac{\pi}{2}\}$.

583．设一椭圆和双曲线有公共焦点，证明它们交成直角。

584．设在标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$里，已知双曲线的焦距等于$2\sqrt{10}$，其二渐近线的方程为：$x+2y+4=0$、$2x-y+2=0$．并知双曲线的一枝位于渐近线含有坐标原点的那个夹角里。对此标架，求双曲线二焦点的坐标。

585．说明下面两双曲线是否相似？对标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$它们的方程是：

（1）$9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$和$\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{18}=1$；

（2）$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{3}=1$和$x^2-4y^2+6x+5=0$．

586．求双曲线共轭直径间的夹角，其中一条的角系数为k。

587．对标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$写出一直线的方程，该直线过双曲线$x^2-y^2=a^2$的一焦点$F(a\sqrt{2}, 0)$并使点F按比值$\lambda=2$分它与双曲线相交形成的弦。

588．设双曲线的半轴为 a 和 b，过双曲线上一点 M 作其二渐近线的平行线，两条渐近线和二平行线构成一平行四边形，计算该平行四边形的面积。

589．证明等轴双曲线的渐近线平分其共轭直径间的夹角。

590．设双曲线上的点 M_0 与其焦点F位于虚轴的同侧。过点M_0引渐近线的平行线并与对应焦点F的直径 d 交于点D．证明等式：

$$|FM_0|=|DM_0|.$$

591．证明：双曲线的任意切线与其两条渐近线的交点，到双曲线中心距离之积等于焦距平方之半。

592．证明：双曲线与直线的切点是以该切线与其两渐近线交点为两端点的线段之中点。

593．证明：双曲线之切线与其两渐近线构成之三角形的面积等于双曲线两半轴的积。

594．证明：

（1）双曲线的一焦点关于其切线的对称点，位于过切点和第二焦点的直线上，并且该点到第二焦点的距离等于实轴长。

（2）过双曲线的两焦点向其切线引垂线，两垂足与双曲线之中心的距离都等于半实轴。

595．平行线束P的每条直线都和曲线 γ 相交一个点。把满足下列条件的平面变换f叫作以P为方向、对曲线γ的平面压缩：(1) $f(M)=M$, $\forall M\in\gamma$, (2) 若 $M\notin\gamma$, 则 $f(M)=M'$ 而使：(a) $(MM')\in P$, (b) 点 $A=(MM')\cap\gamma$ 按同一比值μ分线段$\overline{MM'}$（μ为压缩系数）。

已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．以 $\mu=-\frac{1}{2}$为压缩系数、横轴为方向对双曲线的右枝来作平面压缩时，求纵轴的象。

596．证明：双曲线内接三角形的垂心，属于同一条双曲线。

597．求双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$在点$(x_0, y_0)$处切线的斜率。

598．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求平行于象限角之平分线的切线方程。

599．在什么条件下，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线互相垂直？

600．已知等轴双曲线$x^2-y^2=a^2$，若将其二渐近线取作坐标轴，它的方程呈何种形式？

601．若已知一双曲线之二渐近线间的夹角等于$60°$，而其焦距是$4\sqrt{3}$，写出双曲线的标准方程。

602．写出和椭圆$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$有公共焦点的双曲线方程。设该双曲线的离心率$e=\frac{5}{4}$。

603．证明：双曲线的准线过对应焦点在渐近线上的正射影。

604．设一双曲线的焦距比二准线间的距离大一倍，求该双曲线之二渐近线间的夹角。

605．在双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$上求一点，使该点的焦半径互相垂直。

606．求双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的内接正方形的边长。试问什么样的双曲线可能有内接正方形？

607．写出双曲线$x^2-\frac{y^2}{4}=1$的过点$M(1,4)$的切线方程。

608．写出双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$的这样的切线方程，它垂直于直线$2x+5y+11=0$。

609．求双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的二焦点到其切线距离之积。

610．若一双曲线的极坐标方程是：

$$\rho=\frac{9}{4-5\cos\varphi},$$

求该双曲线的标准方程。

611. 在标准正交标架下给出了双曲线的标准方程，写出它在极坐标系下的方程。

612. 求双曲线的某一焦点在该双曲线各条切线上正射影所组成的图形。

613. 求双曲线的某焦点关于该双曲线各条切线的对称点所组成的图形。

614. 求和已知圆相切并过该圆外一定点的诸圆之圆心所组成的图形。

615. 求一图形，该图形的每个点到两条相交直线的距离之积等于给定的正数。

616. 求与不含圆面、一个在另一个外部的两个定圆相切的诸圆之圆心所组成的图形。

617. 证明：双曲线的一条切线与其渐近线的两交点和该双曲线的两个焦点共圆。

618. 证明：双曲线的切线平行于一条这样的直径，它与过切点的直径是共轭的。

619. 证明：两条共轭的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$，它们中的一条与另一条关于其一条渐近线按另一条渐近线的方向是反对称的。

620. 写出双曲线的方程，取该双曲线的两条共轭直径作坐标轴。

§3 抛物线

621. 若对标架 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 给出了抛物线一焦点的坐标 $F(1, 2)$ 及准线方程：$x+3y-6=0$，对此标架写出抛物线方程。确定

抛物线的参数。

622．已知线段[OA]和[AB]，并且$(OA)\perp(AB)$．其中每个线段分别用点A_1，A_2，…和点B_1，B_2…分成n等份。引各射线$[OB_i)$并再过点A_i分别引平行(AB)的诸直线l_i．证明：各个点$M_i=[OB_i)\cap l_i$属于一条抛物线。

623．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下，一直线的方程是$8x-3y+6=0$，在该直线上求到直线a: $x-5=0$和到点$A(-3,2)$等距的点。

624．求一图形F，假设它的点是这样一些圆的圆心，它们都和圆S及直线l相切。并且直线l与圆S相切。

625．证明：若抛物线的一弦过其焦点，则该弦中点到其准线的距离等于这弦长之半。

626．对标架$R=(O,\vec{i},\vec{j})$给出了两条抛物线的方程γ: $ax^2-y-b^2=0$及γ': $ay^2-x-c^2=0$ $(a>0)$．证明两抛物线的交点共圆。

627．求由平面上这样一些点组成的图形Φ，这些点是抛物线γ的焦点关于其所有切线的对称点。

628．证明：有公共焦点并且焦点在其二顶点之间的两条抛物线相交成直角。

629．证明：若一抛物线和三角形的一边及另两边的延长线都相切，则该抛物线的准线过此三角形的垂心（**斯泰因纳儿**(Steiner)**定理**）。

630．设x_1，x_2是直线p与抛物线$y=ax^2$交点的横坐标，x_3是点$H=p\cap(Ox)$的横坐标。证明：

$$\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

631．给出了抛物线γ及在其顶点处的切线t．设d是该抛物线的另一条切线以及$M=t\cap d$，$(MN)\perp d$．证明：直线(MN)过抛物线γ的焦点。

632．以k为压缩系数、纵轴为方向对抛物线$y=ax^2$来作平面压缩时，求直线$Ax+By+C=0$的象（参看595题）。

633．已知抛物线的拱弧高等于 h，而它的底宽等于 $2a$．求抛物线的参数。

634．求抛物线 $y^2=8x$ 的某条弦的方向，该弦被直径 $y=4$ 等平分。

635．已知抛物线 $y^2=10x$．求平分斜率 $k=5$之弦的直径。

636．已知抛物线方程 $y^2=2px$．写出与该抛物线有公共焦点及公共轴的抛物线方程。

637 设直线 $x-3y+9=0$ 与抛物线 $y^2=2px$ 相切。求p．

638．求由抛物线焦点向该抛物线的诸切线所作的垂线足构成的图形。

639．在极坐标系下，写出抛物线 $y^2=8x$ 的方程。

640．写出由方程：

$$\rho=\frac{6}{1-\cos\varphi}$$

所确定的抛物线之标准方程。

641．设抛物线的焦点 F 及抛物线上两个任意点 M_1，M_2处两切线的交点是E．证明，角 M_1FM_2 之平分线属于直线(FE)．

642．求抛物线 $y^2=64x$ 和直线 $4x+3y+46=0$ 间的距离。

643．证明：抛物线的焦点和过准线上任意一点向它所引两切线的两个切点共线。

644．求过定点且和定直线相切的圆之圆心所组成的图形。

645．证明：抛物线的切线方向与过它的切点的直径方向共轭。

646．证明：过抛物线任何弦之二端点之切线的交点属于和该弦共轭方向的直径。

§4 二次曲线的一般方程

647．在标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$下，二抛物线的方程是：

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0,$$

$$3x^2+2x-6y+5=0.$$

先证相似*再确定它们的相似系数。

648．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下，已知直线a的方程是$x+2y-1=0$，直线a是某一个抛物线的对称轴，而其顶点是$O'\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$，写出过点$M\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$的该抛物线方程。

649．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下，已知一双曲线过点$M(1,3)$及它的两渐近线方程：$x+3y-6=0$和$4x-5y+20=0$．写出该双曲线的方程。

650．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下，已知一条二次曲线方程：

$$9x^2-4xy+6y^2+6x-8y+2=0.$$

确定该二次曲线顶点的坐标。

651．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下一椭圆的方程是：

$$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0.$$

求该椭圆的离心率。

652．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下，已知二次曲线γ的焦点$F(3,0)$，对应该焦点的准线方程$x=\frac{25}{3}$和点$M_0(0,4)\in\gamma$．求二次曲线γ的方程。

653．就标架$(O,\vec{i},\vec{j})$给出了直线方程d：$3x-4y+3=0$和点的坐标$F(6,-2)$，它们分别是某双曲线的准线和相应的焦点，又知点$A(2,1)$属于双曲线。求该双曲线的方程。

654．就标架$(O,\vec{i},\vec{j})$给出了抛物线方程：$y^2=8x$及直线$x+y=0$．写出平行该直线的、抛物线的切线方程。

655．在标架$(O,\vec{i},\vec{j})$下，已知抛物线方程$y^2=2x$及点$A(8,5)$，$B(2,2)$，$C(4,-1)$．写出过点A，B，C的抛物线之切线方程。

656．设一直角的两边和抛物线相切，求该直角顶点轨道的

---

* 先证相似是译者加的。

形状。

657．证明：椭圆的外切菱形的所有顶点都位于它的两轴上。

658．在标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$下，已知椭圆方程：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$和点$A(8, 2)$，写出过点A向椭圆引的切线方程。

659．就标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$给出了椭圆方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$和直线方程$Ax+By+C=0$．导出直线和椭圆相切的充要条件。

660．就标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$给出了抛物线标准方程$y^2=2px$和直线方程$Ax+By+C=0$．导出直线和抛物线相切的充要条件。

661．就标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$给出了双曲线标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$和直线方程$Ax+By+C=0$．导出直线和双曲线相切的充要条件。

662．就标架$(O, \vec{i}, \vec{j})$给出了两椭圆方程：

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1, \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1.$$

写出这两椭圆之公切线的方程。

663．证明：若平面Π的已知五个点M_1，M_2，M_3，M_4，M_5中的任何三个点不共线，则有唯一的二次曲线通过这五个点。

664．求下列各曲线的中心。

（1）$x^2-4xy+5y^2+20x+16y+5=0$；

（2）$3x^2+8xy+20y^2-12x+4y+5=0$；

（3）$x^2-2xy+y^2+6x-2y+1=0$；

（4）$4x^2+10xy+5y^2-2x-4y+3=0$；

（5）$12x^2+7xy-12y^2-1=0$；

（6）$x^2+2xy+y^2-6x-6y+5=0$．

665．写出曲线$3x^2-5xy+y^2+8x=0$的直径方程，该直径平分斜率为$k=-\frac{2}{3}$的弦。

666．写出曲线

$$5x^2 - 8xy + 13y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$$

的过点 $K(1, -2)$ 的直径方程。

667. 在标架 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 下，用下列各方程给出了诸曲线。求每条曲线的主方向之斜率。

（1） $3x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - y + 7 = 0$；

（2） $x^2 + 6xy - 7y^2 + x = 0$；

（3） $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 3y = 0$；

（4） $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$.

668. 在标架 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 下，写出下列每条曲线之轴的方程。

（1） $5x^2 + 24xy + 75y^2 - 36x + 6y + 1 = 0$；

（2） $7x^2 + 26xy + 7y^2 + 42x = 0$.

669. 把下列各曲线方程化成典范型。

（1） $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$.

（2） $3x^2 + 4\sqrt{2}xy + 5y^2 + 6x - 1 = 0$；

（3） $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

670. 把下列各曲线方程化成典范型。

（1） $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 6y + 3 = 0$；

（2） $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 8x + 14y + 3 = 0$；

（3） $x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x + 24y + 15 = 0$.

671. 证明：若一条二次曲线过三角形的三个顶点及它的垂心，则该曲线是等轴双曲线。

第 二 篇

欧氏空间和仿射空间中的直线　平面和二次曲面

第一章 空间坐标法、向量积和混合积

§1 空间坐标法

在672—684各题中是仿射坐标系。

672．设点D、E、F是四面体$OABC$三条棱$[BC]$，$[AC]$，$[AB]$的中点。就标架(O,D,E,F)，求该四面体各顶点的坐标。

673．给出了点$A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$．求每个坐标面分割线段$\overline{AB}$的比值。

674．证明：连接四面体对棱中点的各线段相交于一点、并且该交点平分各线段。

675．过四面体各棱中点和其对棱分别作平面。证明这些平面相交于一点。

676．设四角形$ABCD$的顶点不共面。在该四角形各边所在直线上，给出了这样一些点M，N，M'，N'（异于顶点），使

$$(AD,M)=(BC,M')=\lambda_1,$$
$$(AB,N)=(DC,N')=\lambda_2.$$

证明：直线(MM')和(NN')交于一点P，且该点使：

$$(MM',\ P)=\lambda_2,\quad (NN',\ P)=\lambda_1.$$

677．给出了点$M(a,b,c)$（坐标是相异正数）。作出下列各点：

$M_1(a,c,b)$，$M_2(b,c,a)$，$M_3(c,a,b)$．

678．给出了两个点$M_1(a_1,b_1,c_1)$和$M_2(a_2,b_2,c_2)$．写出属于线段$[M_1M_2]$的任意点的坐标。

679．已知平行四边形$ABCD$之顶点A，B，C的坐标。计算顶点D的坐标：

(1) $A(2,1,1)$，$B(3,-1,1)$，$C(0,2,-3)$；

(2) $A(3,1,-1)$, $B(2,-1,1)$, $C(-2,0,3)$.

680. 设点O是平行六面体$ABCDA_1B_1C_1D_1$的对角线之交点；点O_1, O_2, O_3分别是侧面ADD_1A_1, ABB_1A_1, $ABCD$的中心。写出从标架$R=(A,B,D,A_1)$变到标架$R'=(O,O_1,O_2,O_3)$的变换公式。

681. 给出了向量空间V的基底$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. 证明各向量：$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2-a_3\vec{e}_3$, $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$, $\vec{c}=c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}^2+c_3\vec{e}_3$ 线性相关，当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

682. 证明四点A, B, C, D属于一个平面：

(1) $A(3,1,1)$, $B(-2,1,-2)$, $C(-3,-1,0)$, $D(2,0,1.7)$；

(2) $A(-2,1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,4,-1)$, $D(-2,4,-3)$.

683. 设直接l的方向向量为$\vec{a}$. 向各坐标平面且平行于l作点$A(-3,2,1)$的射影：A_1, A_2, A_3. 计算这些射影的坐标。假设：

(1) $\vec{a}(2,1,-1)$； (2) $\vec{a}(-1,1,2)$.

684. 已知诸点$A_1(-7,3,-2)$, $A_2(0,2,1)$, $A_3(4,-1,0)$, $A_4(-1,0,-3)$. 证明$R'=(A_1, A_2, A_3, A_4)$是一个标架，并求它的定向。假定原标架是正定向。

在685—699 各题中是笛卡儿直角坐标系。

685. 直线(AB)平行于平面Π, $(AB)\not\subset\Pi$. 过点A, B分别引垂直于(AB)的直线l_1, l_2, 使$(\widehat{l_1, \Pi})=45^\circ$, $(\widehat{l_2, \Pi})=30^\circ$. 求$(AB)$到平面$\Pi$的距离。设$|AB|=a$, $|L_1L_2|=b$, 其中$L_i=\Pi\cap l_i (i=1,2)$.

686. 已知一立方体的棱长等于a. 求其相邻二侧面不相交的对角线间的距离。

687. 在一正三棱锥里，于各顶点处它有直平面角。求由锥顶所引侧面的中线和底面内与它相错的中线间的夹角。

688. 直线(AB)与坐标面Oxy, Oyz相交于点M, N. 计算线段$[MN]$的长。假设：

(1) $A(2,1,1)$, $B(-2,0,3)$;

(2) $A(-3,1,1)$, $B(0,-1,2)$.

689. 就标准正交标架给出了三角形 ABC 的诸顶点 $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$, $[AD]$是其一内角平分线。求点D的坐标和线段$[AD]$的长。

690. 一直平行六面体的对角线$[OD]$和它的棱$[OA]$, $[OB]$都成$60°$角。试问该对角线与棱$[OC]$间的夹角是多少度？

691. 计算点C在直线(AB)上的正射影C_1的坐标。假设：

(1) $A(2,-1,0)$, $B(-1,3,1)$, $C(0,1,-1,)$;

(2) $A(3,1,1)$, $B(-2,1,-1)$, $C(1,-1,2)$.

692. 已知两点A和B. 求能使ABC成等腰三角形的顶点C的集合。假设：

(1) $A(2,3,-1)$, $B(-1,0,1)$;

(2) $A(-2,1,1)$, $B(-1,1,-2)$.

693. 在直线(AB)上求距Oz轴最近的点。假设：

(1) $A(1,2,-1)$, $B(3,-1,1)$;

(2) $A(3,4,1)$, $B(-2,1,2)$.

694. 诸点$A(1,2,-4)$, $B(4,0,-10)$, $C(-2,6,8)$是一三角形的顶点，求该三角形的各内角。

695. 给出了标准正交标架$R=(O,A_1,A_2,A_3)$。写出从标架R转变成为标架$R'=(O,\vec{e}'_1, \vec{e}'_2,\vec{e}'_3)$的公式。假设$|\vec{e}'_1|=|\vec{e}'_2|=|\vec{e}'_3|=1$, $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$是角xOz, yOz平分角线的方向向量，$\vec{e}'_3$与$\overrightarrow{OA_3}$共线，并且标架R与R'有一致定向。

696. 设l_1是立方体一对角线所在直线，l_2是立方体与该对角线相错的一侧棱所在直线；已知立方体的棱长等于a. 求直线l_1与l_2间的距离。

697. 在标准正交标架下，确定下列各图形Φ：

(1) $\Phi=\{M(x,y,z)\mid(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\}$;

(2) $\Phi=\{M(x,y,z)\mid x^2+z^2=4\}$;

(3) $\Phi=\{M(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=25,\ z=2\}$;

(4) $\Phi=\{M(x,y,z)\mid x^2=4z,\ y=3\}$;

(5) $\Phi=\{M(x,y,z)\mid x^2-z^2=16,\ y\leqslant 2\}$,

(6) $\Phi=\{M(x,y,z)\mid |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c;$

$a、b、c\in R_+^*\}$.

698. 直线l与坐标面Oxy,Oyz的倾斜角相同，并与它们分别相交于点$A(m,0,p)$，$B(0,s,t)$.求此二点坐标间的相依关系。

699. 证明三角形 ABC 是等腰三角形，假设

(1) $A(2,3,-1)$，$B(3,-1,2)$，$C(-1,2,3)$；

(2) $A(m,n,p)$，$B(n,p,m)$，$C(p,m,n)$.

§2 向量积

700. 证明：若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$不共线，则$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{0}\Longleftrightarrow[\vec{a},\ \vec{b}]=[\vec{b},\ \vec{c}]=[\vec{c},\ \vec{a}]$.

701. 计算平行四边形$ABCD$的面积。假设$\overrightarrow{AB}=3\vec{m}-2\vec{n}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{m}+\vec{n}$，$|\vec{m}|=5$，$|\vec{n}|=12$，$\widehat{CAB}=30°$.

702. 如果就标架（O，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$）给出了两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$及$M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$，并且已知直线l的方向向量是$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$.计算点M_1到直线l的距离。

703. 平行四边形$ABCD$的短边$[AB]$在平面Π上，而边$[CD]$至Π的距离等于该平行四边形二长边间的距离。计算平面Π与平行四边形所在平面Π'间的夹角φ .

704. 设直线l平行于平面Π，点A、$B\in l$，$A\notin\Pi$，H是点A在平面Π上的正射影，$D\in\Pi$. 已知$\widehat{DAB}=\frac{\pi}{3}$，$|AD|=\sqrt{3}\cdot|AH|$. 求平面Π和$\Pi'=(l,D)$间的夹角φ.

705. 已知四面体 $A_1A_2A_3A_4$，用 $[A_iB_i]$ 表示它的高线，S_i 是顶点 A_i 所对侧面的面积，$\vec{n}_i$ 是向量 $\overrightarrow{B_iA_i}$ 的单位向量。证明：

$$\sum_{i=1}^{4} S_i\vec{n}_i=\vec{0}.$$

706. 测得一直平行六面体 Φ 的各棱之长分别等于 a,b,c. 平面 Π 过具有公共顶点的三条棱的中点。求截面 $\omega=\Pi\cap\Phi$ 的面积。

707. 就标架 $(O,\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 给出了正方形 $ABCD$ 的顶点 $A(2,-1,3)$，$B(1,1,5)$；以及属于半平面 $[(AB),\ C)$ 的点 $M_0\left(\frac{5}{2},\ -3,\ 0\right)$. 求顶点 C 和 D 的坐标。

708. 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三非零向量是无二者共线*。证明，若向量 $[\vec{a},\vec{b}]$，$[\vec{b},\vec{c}]$，$[\vec{c},\vec{a}]$ 共面，则它们必共线。

709. 给出了非共面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 和数 $\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{R}$. 求满足下列等式的向量 $\vec{x}$：

$$\vec{a}\cdot\vec{x}=\alpha,\quad \vec{b}\cdot\vec{x}=\beta,\quad \vec{c}\cdot\vec{x}=\gamma.$$

710. 给出了非共面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 和数 α，β，γ. 求满足下列等式的向量 $\vec{x}$：

$$[\vec{x},\vec{a}]\cdot\vec{b}=\gamma,\quad [\vec{x},\vec{b}]\cdot\vec{c}=\alpha,\ [\vec{x},\vec{c}]\cdot\vec{a}=\beta.$$

711. 设线段 $[OH]$ 是四面体 $OABC$ 的高线。若已知向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，求向量 $\overrightarrow{OH}$.

712. 证明：若向量 $\vec{m}=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]=\vec{0}$，则向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面。

713. 证明下列各恒等式：

(1) $[\vec{a},\vec{b}]^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$；

(2) $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

(3) $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]+[\vec{b},[\vec{c},\vec{a}]]+[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]]=\vec{0}$

(雅哥比(Jacobi)恒等式)。

---

* 原题无此句，是译者加的。

(4) $[\vec{a},\vec{b}]\cdot[\vec{c},\vec{d}]=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$(拉格朗日(Lagrange)恒等式)；

(5) $([\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c})\cdot([\vec{m},\vec{n}]\cdot\vec{p})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{m} & \vec{a}\cdot\vec{n} & \vec{a}\cdot\vec{p}\\ \vec{b}\cdot\vec{m} & \vec{b}\cdot\vec{n} & \vec{b}\cdot\vec{p}\\ \vec{c}\cdot\vec{m} & \vec{c}\cdot\vec{n} & \vec{c}\cdot\vec{p}\end{vmatrix}$；

(6) $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]]=([\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{d})\vec{c}-([\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c})\vec{d}$；*

(7) $\vec{b}\{[\vec{a},\vec{c}]\cdot\vec{d}\}-\vec{a}\{[\vec{b},\vec{c}]\cdot\vec{d}\}+\vec{d}\{[\vec{c},\vec{a}]\cdot\vec{b}\}-\vec{c}\{[\vec{d},\vec{a}]\cdot\vec{b}\}=\vec{0}$.

714. 能否从条件 $[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c}]$ 且 $\vec{c}\neq\vec{0}$，推出结论 $\vec{a}=\vec{b}$?

715. 计算以点 $A(3,4,-1)$, $B(2,0,3)$, $C(-3,5,4)$ 为顶点的三角形 ABC 的面积。坐标系是笛卡儿直角坐标系。

716. 就基底 $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 给出了各向量 $\vec{a}(3,0,-1)$, $\vec{b}(2,4,3)$ $\vec{c}(-1,3,2)$ $\vec{d}(2,0,1)$. 求 $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$ 和 $[\vec{a},\vec{c}]\cdot[\vec{b},\vec{d}]$.

717. 从一点截取三个有向线段来表示非共面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. 证明：过这三个线段端点的平面，垂直于向量 $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]$.

§3 混合积

718. 计算棱锥 $OABC$ 的体积，如果 $|OA|=a$, $|OB|=b$, $|OC|=c$, $\widehat{AOB}=\alpha$, $\widehat{BOC}=\beta$, $\widehat{AOC}=\gamma$. 讨论以下各种情况：

(1) $\alpha=\beta=\gamma$；

(2) $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $OABC$ 是正四面体。

719. 在单位半径的球面上给出了三角形 ABC，其边长分别等于 α, β, γ 以及顶点 B 的内角等于 θ. 证明下列等式：

---

* 原书印刷有误已更正——译者注。

$\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos\beta$ [illegible] $\cos\gamma\cdot\cos\alpha$.

720．一正三棱锥的棱长为a、体积等于$\frac{1}{6}a^3$．求在棱锥顶点处面角的值。

721．各点A',B',C'按比值：$\lambda_1=(SA,A')$，$\lambda_2=(SB,B')$，$\lambda_3=(SC,C')$分割四面体$SABC$的各棱$[SA]$、$[SB]$，$[SC]$，求四面体$SA'B'C'$和$SABC$的体积V'与V的比。

722．设点A'_1,A'_2,A'_3,A'_4是四面体$A_1A_2A_3A_4$各侧面的重心。求四面体$A_1A_2A_3A_4$和$A'_1A'_2A'_3A'_4$的体积V与V'之比。再证该二四面体的对应侧平面平行。

723．求平行六面体的体积与一四面体的体积之比，该四面体以平行六面体的一个顶点及其不过此顶点的各侧面的三个中心为顶点。

724．在正四棱锥$SABCD$里，点L,K是线段$[SB]$，$[SD]$的中点。用线段$[AK]$,$[AL]$,$[AS]$作一个三棱柱（ΔAKL是其底）。求棱锥$SABCD$的体积与此棱柱的体积之比。

725．求平行六面体的体积与一四面体的体积之比，这个四面体的三条棱是在该平行六面体一顶点处的三个侧面上、由此顶点所引出的三条对角线。

726．设棱锥Φ的底是平行四边形$ABCD$．平面Π过该平行四边形的一边及此边所对侧面的中位线。平面Π把棱锥Φ分成两个多面体Φ_1,Φ_2．求二多面体Φ_1与Φ_2的体积比。

727．线段$[AB]$和$[CD]$分别属于两相错直线l_1和l_2，证明四面体$ABCD$的体积与线段$[AB]$，$[CD]$在直线l_1，l_2上的位置无关。

728．设有二相错直线l_1、l_2，对标准正交标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$给出了两个点$M_0(x_0,y_0,z_0)\in l_1$，和$M'_0(x'_0,y'_0,z'_0)\in l_2$以及两直线的方向向量：$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$、$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$．求$l_1$与$l_2$间的距离。

729．求四面体$ABCD$的体积，如果已知$|AB|=a$，$|CD|=b$，

第二章　平面和直线

§1 平　　面

736. 写出三角形 ABC 所在平面的参数方程。如果就标架 $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ 已给出了它顶点的坐标 $A(2,-5,1)$、$B(3,4,-2)$，$C(0,0,-1)$.

737. 在标架 $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ 下画出平面Π，如果已知它的方程是：

(1) $3x-y+2z-6=0$；

(2) $2x-3y+6=0$；

(3) $3y+2z=0$；

(4) $2x-1=0$.

738. 就标架 $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ 用方程

$$5x-2y-3z+6=0$$

给出了平面Π. 求平行于平面Π的任意向量 $\vec{a}$ 的坐标.

739. 写出过点 $M_0(2,-1,3)$ 且平行于平面

$$2x-y+3z-1=0$$

的平面之参数方程。

740. 在标架 $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ 下，写出平面Π的方程，如果已知它过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于平面 $Ax+By+Cz+D=0$.

741. 在仿射标架下，给出了平行六面体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 的诸顶点 $A(4,0,2)$，$B(0,5,1)$，$C(4,-1,3)$，$A_1(3,-1,5)$. 写出它的各侧面所在平面的方程。

742. 已给一平行六面体和它的一条对角线。两个平面分别过该对角线二端点处的两组三条棱的端点。证明该二平面截此对角线成三个相等部分。

743. 在仿射标架下，用方程

$$x-y-z-7=0,\quad 2x+y-3z+3=0$$

给出了两个平面Π_1,Π_2。（1）Π_1，Π_2所夹二面角中含点$M_1(3,-4,3)$的那个用线性不等式组表示出来。（2）确定点$M_1(2,-1,3)$，$M_2(3,-4,-5)$关于Π_1，Π_2所夹二面角的位置。

744. 在标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$下，给出了四面体各顶点的坐标$A(0,0,2)$，$B(3,0,5)$，$C(1,1,0)$，$D(4,1,2)$．确定点$M_0\left(2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$关于此四面体的位置。

745. 在标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$下，给出了二平面方程$\Pi_1$：$x-2y-3z+5=0$，$\Pi_2$：$2x-4y-6z+7=0$．平面$\Pi_1$，$\Pi_2$把整个空间中不属于二平面的点分成三个区域$\Phi_i(i=1,2,3)$．用不等式确定每个区域。

746. 就标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$，写出过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$并垂直向量$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$的平面$\Pi$的方程。

747. 写出过标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$的原点$O$向平面$\Pi$所引的垂线足$M_0(2,6,-4)$的平面$\Pi$的方程。

748. 设三棱锥$OABC$的侧棱两两互相垂直，它们的长分别等于a，b，c，高线$[OH]$长等于h.
证明等式：

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

749. 写出与平面$3x-6y-2z+14=0$相切于点$(2,1,7)$处的球面方程。如果它的半径等于7（$R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$）.

750. 写出半径$r=6$的球面方程，它与平面Π：$x+2y-2z+1=0$相切于点$M_0(3,0,2)$，并且该球面和点$P(0,1,2)$位于Π之同侧（$R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$）.

751. 写出一球面方程，它位于二平面：
$2x-4y-3z+21=0$，$5x-2z=0$所夹之锐角内，且和这二平面相切，假定它的中心在横轴上（$R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$）.

752. 就标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$，给出了四面体$ABCD$诸顶点的坐标$A(1,0,-2)$，$B(2,1,-1)$，$C(0,2,-3)$，$D(-1,-2,1)$. 求顶点$D$关于侧平面$ABC$的对称点$D'$的坐标。

753. 写出过二点$M_1(2,-1,3)$，$M_2(5,1,2)$并且垂直于平面Π：$x-3y-2z-3=0$的平面方程$(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

754. 已知点$M_0(2,-3,1)$和二平面

$$\Pi_1:\ x+3y-z+3=0,$$

$$\Pi_2:\ 2x+y-2z+1=0.$$

写出过点M_0且垂直平面Π_1，Π_2的平面方程$(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

755. 设三角形ABC各顶点的坐标为$A(1,2,3)$，$B(3,1,1)$，$C(-1,0,1)$. 求三角形ABC之外接圆的圆心$M(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

756. 过直平行六面体$ABCDA_1B_1C_1D_1$的对角线$[AC_1]$，作与侧面$ABCD$之对角线(BD)平行的平面Π. 如果$|AB|=a$，$|AD|=b$，$|AA_1|=c$，计算平行六面体与平面Π之截面的面积S.

757. 正四棱锥$SABCD$的高线等于底面$ABCD$的对角线。过顶点A作平行于(BD)、并且与棱锥之内切球相切的平面Π. 求棱锥和Π之截面与底面的面积比.

758. 过立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$的对角线中点作垂直于该对角线的平面Π。如果立方体的棱长等于a，确定立方体与平面Π的截面之面积。

759. 已给二平面Π_1：$2x-y-2z+5=0$，Π_2：$x-2y-2z+7=0$和点$M_0(2,-3,-1)$. 求二平面Π_1，Π_2含点M_0的那个二面角的余弦$(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

760. 正四棱锥$SABCD$的侧面对其底的倾角为β，点K是侧棱$[SB]$的中点。求二平面(AKC)与(SAB)间的夹角φ.

761. 已给平截头正四棱锥$ABCDA_1B_1C_1D_1$，平面Π过其上、下底的对角线，而平面Π'过下底边及其相对的上底边。该锥高线等于h，$|AB|=a$，$|A_1B_1|=b$，求平面Π与Π'间所夹之锐角。

762. 在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出平面方程$\Pi_1$：$A_1x+B_1y+$

$C_1z+D=0$, Π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$及点$M_0(x_0,y_0,z_0)$.
证明：点M_0位于Π_1和Π_2所夹锐角的内部，当且仅当下列不等式成立：
$(A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)<0$.

763. 在标准正交标架下，给出平面方程Π: $Ax+By+Cz+D=0$及点$M_0(x_0,y_0,z_0)$. 求点M_0到平面Π的距离$\rho(M_0,\Pi)$.

764. 给出一四面体的顶点$A(0,0,3)$, $B(1,-2,1)$、$C(0,-2,2)$, $D(1,1,1)$. 计算其高线$[DH]$的长($R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

765. 已知正四棱锥$SABCD$，其底$ABCD$. 过底边$[AB]$及侧棱$[SD]$的中点作平面Π. 如果$|AB|=a$和高线$[SH]$的长等于h，求顶点S到平面Π的距离。

766. 在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出平面方程$2x+y-4z+5=0$及球面方程$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=21$. 写出平行该平面且与球面相切的平面方程。

767. 已知立方体$ABCDA_1B_1C_1D_1$的棱长等于4. 平面Π过侧面$ABCD$的对角线$[AC]$并与立方体交成梯形$ACMN$. 如果$|AN|=5$，求顶点B到平面Π的距离。

768. 在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出了平面方程$\Pi$: $Ax+By+Cz+D=0$，点$M_0(x_0,y_0,z_0)\notin\Pi$. 写出平面$\Pi'\parallel\Pi$的方程，$\Pi'$到$\Pi$的距离为$h$并且和点$M_0$位于$\Pi$的同侧。

769. 在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出了两平行平面方程$\Pi_1$: $4x+6y+2z-7=0$，Π_2: $2x+3y+z+5=0$. 写出位于两平行平面正中间的平面方程。

770. 在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出了两个平面方程

$$\Pi_1:\ 2x-y-z+3=0,$$

$$\Pi_2:\ 4x-2y-2z+5=0.$$

写出平行两个已知平面、但不位于它们之间且到Π_1的距离是到Π_2的距离两倍的平面方程。

771. 设一球面的半径$r=5$，三个平面方程为

$$\Pi_1:\ 3x-4y+10=0;$$

$$\Pi_2:\ x-2y-2z+3=0,$$

$$\Pi_3:\ x+2y+2z-5=0.$$

此球面内切于由三个平面构成的且含点 M_0（1，−1，−1）的那个三面角。求此球心的坐标（$R=(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$）.

772．就标准正交标架 R，给出了两个平行平面方程

$$\Pi_1:\ Ax+By+Cz+D_1=0,$$

$$\Pi_2:\ Ax+By+Cz+D_2=0\ (D_1\neq D_2).$$

求此二平面间的距离。

773．在标架 $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 下，给出了一立方体的二侧平面的方程：$x-2y-2z+4=0$，$2x+2y-z-13=0$ 及立方体中心的坐标 $M_0(1,1,-2)$．求该立方体其余各侧平面的方程。

774．在标架 $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 下，在立方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 里给出了平面方程 (ABC)：$2x-y+2z+15=0$，(ABB_1)：$x-2y-2z+6=0$．以及侧面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心 $M_0(1,-1,0)$．写出该立方体其余各侧面的平面方程。

775．给出了两个平面方程

$$\Pi_1:\ x-y+2z-1=0$$

$$\Pi_2:\ 2x-y+z-3=0$$

和一点 $M_0(1,1,1)$．写出 Π_1 与 Π_2 含点 M_0 的那个二面角之平分角面方程 $(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

776．在标架 $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 下，给出了两个平面方程

$$\Pi_1:\ x-y+2z-5=0,$$

$$\Pi_2:\ 2x-y-2z+7=0$$

以及点 $M_0(1,-1,1)$．写出 Π_1 与 Π_2 含点 M_0 的那个二面角的平分角面方程。

777．给出了三角棱锥各顶点的坐标：$A(1,1,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,0)$，$D(1,5,7)$．写出二面角 $B\cdot(AD)\cdot C$ 的平分角面方程（标架 $(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

778．已知一四面体的各顶点 $A(-1,-2,0)$，$B(5,0,5)$.

$C(3,2,2)$，$D(-1,0,2)$．写出以$[AB]$为棱的内二面角的平分角面方程，再求该角的余弦$(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$．

779．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出了两个平面方程

$$\Pi_1:\ 3x-2y-z+3=0,$$

$$\Pi_2:\ 2x-3y+z-5=0.$$

写出Π_1与Π_2所夹锐二面角的平分角面方程。

780．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，已知一球面内切于由三个坐标面和平面$\Pi: x+2y-2z+8=0$所构成的四面体。写出该球面方程。

781．在标准正交标架下，给出了平面Π：$Ax+By+Cz+D=0$及点$M_1(x_1,y_1,z_1)$．求点M关于平面Π的对称点M_2的坐标。

782．在架标$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出了二球面方程

$$\Phi_1:\ x^2+y^2+z^2-2x+4y-20=0,$$

$$\Phi_2:\ x^2+y^2+z^2+2x-2z-14=0.$$

证明：二球面Φ_1与Φ_2相交并求$\Pi\supset\gamma$，$\gamma=\Phi_1\cap\Phi_2$的平面方程。

783．在空间E_3里给出了彼此相异的有序点组

$$(A_1,A_2,\cdots,A_n)\ (n\in \boldsymbol{N},n\geqslant 3).$$

平面Π和过已知两点的每条直线都相交。设Π与诸直线(A_1A_2)，(A_2A_3)，…，(A_nA_1)分别交于点M_1，M_2，…，M_n．并设

$$\varepsilon=(A_1A_2,M_1)(A_2A_3,M_2)\cdots(A_nA_1,M_n).$$

证明：若n是偶数时，则$\varepsilon=+1$；若n是奇数时，则$\varepsilon=-1$．

784．已知三个平面，其中每个平面各过三面角的一条棱并且通过该棱所对面角的平分线。证明这三个平面属于同一面束。

785．已知三个平面，其中每个平面各过三面角的一条棱，并且垂直于该棱相对的侧面。证明这三个平面属于同一面束。

786．在仿射标架下，给出了四面体$ABCD$各侧面所在平面方程

$$\Pi_1:\ x+2y+z+2=0,$$

$$\Pi_2:\ x-y-z=0,$$

$$\Pi_3:\ x+y-1=0,$$

$$\Pi_4:\ 3x-z+1=0.$$

写出过顶点$A=\Pi_1\cap\Pi_2\cap\Pi_3$且平行$\Pi_4$的平面方程。

§2 直线．直线与平面

787．在标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$下，由下列参数方程给出了直线$l$：

$$\begin{cases}x=2-3t,\\y=1+t,\\z=-3+2t.\end{cases}$$

确定二点$M_1(-1,2,-1)$，$M_2(2,1,3)$中哪个点属于直线l.

788．在标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$下，由下列方程给出了直线$l'$

$$\begin{cases}x-2y-3z-3=0,\\2x+y-z+5=0.\end{cases}$$

写出过点$M_0(2,3,-1)$且平行直线l'的直线l的参数方程。

789．已知点K是四面体$A_0A_1A_2A_3$的内点，各条直线(KA_i)与顶点A_i所对的侧面相交于点A_i'（$i=0,1,2,3$）．证明等式：

$$(KA_0,A_0')+(KA_1,A_1')+(KA_2,A_2')+(KA_3,A_3')=-1.$$

790．已知点$M(2,-1,0)$及直线l：

$$\begin{cases}x=t,\\y=-1-3t,\\z=-1-2t.\end{cases}$$

写出过点M并与直线l垂直且相交的直线方程$(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

791．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由下列参数方程给出了直线$l$：

$$\begin{cases}x=-1+2t,\\y=-4-t,\\z=-1-t.\end{cases}$$

求点$M_1(2,1,-4)$关于直线l的对称点M_2的坐标。

792．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由下列方程给出了两条直线

$$l_1:\begin{cases}x=2t+1,\\y=-t,\\z=3+2t,\end{cases}\quad 和\ l_2:\begin{cases}x-y-2z-1=0,\\2x+2y+z+3=0.\end{cases}$$

计算这两条直线夹角的余弦。

793．在标架 $(O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ 下，由下列方程给出二直线 l_1 和 l_2，确定 l_1 和 l_2 之间的相关位置：

（1）$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t, \end{cases}$ $\begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t, \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-2t, \\ z=-t, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2t, \\ y=-5+3t, \\ z=4, \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x+3y=0, \\ x+z-8=0, \end{cases}$ $\begin{cases} z-4=0, \\ 2x+3z-7=0, \end{cases}$

（4）$\begin{cases} x=t, \\ y=-8-4t, \\ z=-3-3t, \end{cases}$ $\begin{cases} x-y-z=0, \\ 2x-y+2z=0, \end{cases}$

（5）$\begin{cases} x=2-3t, \\ y=1+t, \\ z=-1-2t, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1+6t, \\ y=2-2t, \\ z=1+4t, \end{cases}$

（6）$\begin{cases} 2y-z+2=0, \\ x-7y+3z-17=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=-1, \\ z=4-t. \end{cases}$

794．在仿射标架下，由方程 $y+2z=0$ 给出了一平面、并由下列两方程给出两条直线 l_1，l_2：

$$\begin{cases} x=1-t, \\ y=t, \\ z=4t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2-t, \\ y=4+2t, \\ z=1. \end{cases}$$

写出位于已知平面且与 l_1、l_2 相交的直线方程。

795．在仿射标架下，给出了点 $M_0(2,3,1)$ 并给出两条直线

l_1：$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y+z+4=0, \end{cases}$ 和 l_2：$\begin{cases} x+3y-1=0, \\ y+z-2=0. \end{cases}$

求过点M_0并与l_1，l_2相交的直线方程。

796．在仿射标架下，由方程给出下列两条直线

$$l_1: \begin{cases} x=1+11t, \\ y=-1-5t, \\ z=1-7t. \end{cases} \quad 和 \ l_2: \begin{cases} 2x+3y+z-7=0, \\ x-2y+3z+6=0. \end{cases}$$

证明：两条直线l_1，l_2 ($l_1 \neq l_2$) 平行，并写出位于l_1，l_2正中间的直线l之方程。

797．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，给出了三角形$ABC$各顶点的坐标$A(-1,?,2)$，$B(1,1,0)$，$C(2,6,-2)$．写出高线$[AH]$所在直线方程。

798．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由方程给出了两条直线

$$l_1: \begin{cases} x=1-2t, \\ y=2+t, \\ z=2t. \end{cases} \quad 和 \ l_2: \begin{cases} x=-1+t, \\ y=3+2t, \\ z=2+2t. \end{cases}$$

证明：直线l_1与l_2相交，并写出l_1与l_2所夹锐角的角平分线所在直线方程。

799．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由方程给出了两条相错直线

$$l_1: \begin{cases} x=3+t, \\ y=-1+2t, \\ z=4, \end{cases} \quad 和 \ l_2: \begin{cases} x-3y+z=0, \\ x+y-z+4=0. \end{cases}$$

求l_1，l_2之公垂线方程。

800．设一直平行六面体的相邻二侧面的不相交的两对角线所在直线l_1，l_2与其底面的夹角分别是α和β．求二直线l_1，l_2之间夹角的余弦。

801．在标准正交标架下，给出了三角形ABC各顶点的坐标$A(4,1,-2)$，$B(2,0,0)$，$C(-2,3,-5)$．写出三角形ABC之内角平分线$[AD]$所在直线方程。

802．在标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$下，由其方程给出直线$l$，

$$\begin{cases} x=2-t, \\ y=3+2t, \\ z=-3t, \end{cases}$$

及平面Π：$2x+2y-z-5=0$和点$M_1(5,1,-2)$，写出过点M_1平行于平面Π且与直线l相交的直线l'的方程。

803．由方程给出了直线l：

$$\begin{cases} x=1-2t, \\ y=3+t, \\ z=3t, \end{cases}$$

和平面Π的方程：$x-y-z-5=0$．写出直线l在平面Π上正射影的直线方程$(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$．

804．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由下列方程给出了直线$l$，

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=1-t, \\ z=3+t, \end{cases}$$

并已知平面Π：$x+y+z-10=0$．写出过点$M=\Pi\cap l$且垂直直线l的直线$l'\subset\Pi$的方程。

805．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由方程给出了下列二直线

$$l_1:\ \begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1+t, \\ z=1-t, \end{cases} \qquad \text{和}\ l_2:\ \begin{cases} x=-4+2t, \\ y=2-2t, \\ z=-2-3t, \end{cases}$$

证明l_1，l_2是相错直线。并求平行于两条直线l_1、l_2且与它们等距的平面Π之方程。

806．已知四棱锥$SABCD$的底是正方形$ABCD$，$|AB|=a$．直线(SA)垂直于底面且$|SA|=h$．过顶点A作平面Π平行于直线(BD)，且使$\Pi\cap(SC)=M$，$(SC,M)=\lambda>0$．并求棱锥与平面Π截面的面积。

807．在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由下列方程给出两条直线

$$\Pi_2: \ 2x-y-3z+5=0.$$

写出Π_1、Π_2所夹二面角之平分面所在平面Π的方程。

814. 在标架$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$下，由下列方程给出了直线$l$：

$$\begin{cases} 2x-y-z-5=0, \\ x+y-2z+3=0. \end{cases}$$

并且给出了平面Π的方程：$x-3y+z-1=0$．写出直线l在平面Π上的正射影方程。

815. 在标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$下，由下列方程给出了直线$l$：

$$\begin{cases} 2x-y-3z-5=0, \\ x+y-z+1=0. \end{cases}$$

求过直线l并且平行于向量$\vec{a}(1,3,-2)$的平面Π的方程。

816. 在标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$下，由方程给出了下列各平面

$$\Pi_1: \ x+2y+z+2=0,$$

$$\Pi_2: \ x-y-z=0,$$

$$\Pi_3: \ x+y-1=0,$$

$$\Pi_4: \ 3x+z+1=0.$$

（1）证明所给出的四平面组成四面体。

（2）写出过直线$l_1=\Pi_1\cap\Pi_2$并且平行于直线$l_2=\Pi_3\cap\Pi_4$的平面Π的方程。

（3）写出过平面Π_1，Π_2，Π_3的公共点且平行于Π_4的平面Π'的方程。

§3 杂 题

817. 已知三面角$SABC$之平面角BSC，CSA，ASB的值分别是α，β，γ．证明：使$\alpha+\beta=180°$的充要条件是棱$[SC]$垂直于角ASB的平分角线。

818. 过直三面角$Oabc$的顶点O在其内部引射线d．证明：

$$\widehat{(d,a)}+\widehat{(d,b)}+\widehat{(d,c)}<180°.$$

819. 向一球面引两条相错的切线a和b，求与球面相切且与二直线a，b相交的切线之切点的集合。

820. 已知直角三角形ABC（$\hat{C}=90°$）．求这样的点P集合，它使$|AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2$．

821. 已知四面体$SABC$，在它的顶点S处都是直平面角。求点M的集合，它使

$$|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2=3|MS|^2.$$

822. 已知平行六面体$ABCDA_1B_1C_1D_1$．证明，每一条和四条直线(AB_1)，(BC_1)，(CD_1)，(DA_1)中的三条相交的直线，相交于第四条或与它平行。

823. 设直线l和四面体$ABCD$的各侧平面相交于下列各点：$A_1=l\cap(BCD)$，$B_1=l\cap(CDA)$，$C_1=l\cap(DAB)$，$D_1=l\cap(ABC)$．证明：各线段$[AA_1]$，$[BB_1]$，$[CC_1]$，$[DD_1]$的中点共面。

824. 给出了两个四面体$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$．证明：若七个四点组$\{A,B,C,D_1\}$，$\{B,C,D,A_1\}$，$\{C,D,A,B_1\}$，$\{D,A,B,C_1\}$，$\{A_1,B_1,C_1,D\}$，$\{B_1,C_1,D_1,A\}$．$\{C_1,D_1,A_1,B\}$分别属于七个平面，则四点D_1,A_1,B_1,C必属第八个平面。再证明：各线段$[AA_1]$，$[BB_1]$，$[CC_1]$，$[DD_1]$的中点也属于一个平面。

825. 已知三条两两相错的直线a，b，c，而且它们不平行同一平面。假设点$B\in b$，点$C\in c$，直线(BC)与直线a相交或平行，求线段$[BC]$的中点集合。

826. 已知平截头三棱锥$ABCA_1B_1C_1$，诸点A_0，B_0，C_0是棱$[BC]$，$[CA]$，$[AB]$的中点。证明：线段$[A_1A_0]$，$[B_1B_0]$，$[C_1C_0]$相交于一点。

827. 已知点A的坐标a，b，c互不相同。把已知点的坐标a，b，c，进行全排列，这样就又给出了五个点的坐标。作出这五个点。证明上述六点共圆（$R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$）．

828. 在空间里给出了具有整数坐标的九个点。证明：以已知点为端点的诸线段中，至少有一个线段的中点坐标是整数。

829. 给出了四面体的各顶点$A(1,1,-1)$，$B(4,2,3)$，$C($[illegible]

$-4,-2)$, $D(-3,0,1)$. 证明：坐标原点在这个四面体的内部。

830. 已知一四面体由笛卡儿直角坐标系的三个坐标面和平面 $2x+3y-6z-4=0$ 所组成。求该四面体内切球心的坐标。

831. 已知一四面体由笛卡儿直角坐标系的三个坐标面及平面 $9x-2y+6z-22=0$ 所组成。求与该四面体每个侧面所在平面都相切的各个球面之球心的坐标。

832. 在标架 $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 下，由下列方程给出了两条直线：

$$\begin{cases}2x+3y+4z-9=0,\\3x-5y+z+1=0,\end{cases}\quad 和\begin{cases}x+2y-3z+6=0,\\13x+10y+11z-22=0.\end{cases}$$

求这两条直线间的夹角。

833. 由下列方程给出了一直线：

$$\begin{cases}x-3y+z-11=0,\\2x-8y+3z-30=0.\end{cases}$$

求这条直线在直角坐标系每个坐标面上的正射影。

834. 在标架 $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 下，求由方程给出的下列两条直线间的距离：

$$l_1:\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{3},$$

$$l_2:\quad \frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{4}.$$

835. 在直角坐标系下，由下列方程给出了一条直线：

$$\begin{cases}2x-3y+4z-12=0,\\x+4y-2z-10=0.\end{cases}$$

求这条直线向各坐标平面作正交射影所在平面方程。

第三章 二次曲面

§1 二次柱面和锥面、旋转曲面

本节习题里的坐标系是笛卡儿直角坐标系。

836. 已知**旋转锥面**与各坐标面相切，并且它的轴通过每个坐标都是正的一点。写出此旋转锥面的方程。

837. 写出过点 $M_1(1,0,-1)$、$M_2(2,0,2)$ 的**二次柱面**方程，如果两个平面

$$\Pi_1:\ x+2y+z=0,$$

$$\Pi_2:\ x-z=0$$

是该柱面的对称平面，而直线 $l=\Pi_1\cap\Pi_2$ 是它的对称轴。

838. 写出过下列三条直线的旋转锥面的方程：

l_1: $x=2+t$, $y=2t$, $z=-1+2t$;

l_2: $x=2+2t$, $y=t$, $z=-1+2t$;

l_3: $x=2-t$, $y=2t$, $z=-1-2t$.

839. 写出一**旋转柱面**的方程：已知它的三条母线方程：

l_1: $x=t$, $y=t$, $z=t$;

l_2: $x=-1+t$, $y=t$, $z=1+t$;

l_3: $x=1+t$, $y=-1+t$, $z=2+t$.

840. 写出过点 $M_0(1,-2,1)$ 的旋转柱面方程，它的轴是直线：

$$x=t,\ y=1+2t,\ z=-3-2t.$$

841. 已知柱面方程

$$\Phi:\ ax^2+by^2+2cx+2dy+e=0,$$

和一直线方程

$$l:\ x=x_0+a_1t,\ y=y_0+a_2t,\ z=z_0+a_3t.$$

求下列各命题的充要条件：

（1）$l\cap\omega=\{M_1, M_2\}\ (M_1\neq M_2)$；

（2）$l\cap\omega=\{M\}$；

（3）$l\subset\omega$；

（4）$l\cap\omega=\varnothing$。

842．已知一抛物柱面过点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(1,-1,1)$，它的母线平行于直线：

$$x=t,\ \ y=t,\ \ z=-2t,$$

而平面

$$x+y+z=0$$

是它的对称平面。写出该柱面方程。

843．互相垂直的平面Π和Π'，各过一条不同的平行直线 l 和l'．求由所有直线$\Pi\cap\Pi'$上的点组成的图形。

844．由方程组：

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1, \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$$

给出了一条曲线。写出该曲线在xOy平面上正射影的方程。

845．由下列方程给出了一柱面：

$$ax^2+by^2+2cx+2dy+e=0\ (a^2+b^2\neq 0)。$$

求该柱面与平面：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

的截线。

846．写出柱面方程，已知它的母线的方向向量$\vec{a}(5,3,-2)$及其准线方程：

（1）$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=0； \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} y^2-z^2=4, \\ x=0； \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x^2=2z, \\ y=0。 \end{cases}$

847. 已知一柱面的母线与球面

$$x^2+y^2+z^2=1$$

相切并且与各坐标轴成等角，写出此柱面方程。

848. 写出同时通过各坐标轴的旋转锥面方程。

849. 写出下列二球面的外切圆锥方程：

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

$$(x-2)^2+y^2+z^2=9.$$

850. 由下列方程给出一锥面：

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

写出过点 $M_1(0,-2,2)$、$M_2(-1,0,0)$ 并与该锥面交成抛物线的平面方程。

851. 已知二直线l_1、l_2相交于点 $O(0,0,0)$ 处，并且其夹角等于α，求图形

$\Phi=\{M\in E_3 \mid \rho(M,l_1)=k\rho(M,l_2),\ k\in R,\ k>0\}$。

852. 设在半空间$x\geqslant 0$里，一球面和平面yOz及球面

$$(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$$

均相切。求由这样球面之球心组成的图形之方程。

853. 写出以$S(1,0,-1)$为顶点并过曲线：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1,\\ x+y=0\end{cases}$$

的锥面方程。

854. 证明：抛物线：

$$\begin{cases}x^2+4y^2+4xy-6x-2y+3=0\\ z=0;\end{cases}$$

双曲线：

$$\begin{cases}4y^2+4z^2-10yz-2y+2z+3=0,\\ x=0\end{cases}$$

和椭圆：

$$\begin{cases} x^2+4z^2-6x+2z+3=0, \\ y=0 \end{cases}$$

同时位于以$S(1,1,1)$为顶点的一锥面上。求该锥面方程。

855．在什么条件下，平面：

$$Ax+By+Cz=0$$

和锥面：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

相交成一对实直线？

§2　椭圆面

在本节各习题里的坐标系是笛卡儿直角坐标系。

856．已知四面体的各顶点$A(2,1,-1)$，$B(0,3,-1)$，$C(0,0,-3)$，$D(0,-1,-1)$．写出这个四面体的外接球面的方程。

857．已知球面方程：

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2;$$

和一直线方程：

l：$x=x_0+a_1t$，$y=y_0+a_2t$，$z=z_0+a_3t$．

对直线l的下述命题，写出其充要条件：

（1）与已知球面交于两个点；

（2）与已知球面相切；

（3）与已知球面没有公共点。

858．证明：由下列方程组：

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25, \\ 2x-y+2z-11=0 \end{cases}$$

所确定的图形是圆，并求它的圆心和半径。

859．证明：由方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+6y+z-22=0, \\ 2x+2y-z-3=0 \end{cases}$$

所给出的图形γ是圆。写出过圆γ和点$M(4,2,-1)$的球面方程。

860．确定由方程：

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$$

所给定的图形Φ，其中a，b，c，d是实数。

861．给出了一个点$M_0(x_0,y_0,z_0)$及一球面：

$$x^2+y^2+z^2=R^2 .$$

过点M_0引与该球面相交诸直线，求由球面与诸直线所截线段的中点所组成的图形之方程。

862．已知球面Φ和点A．设直线a过点A并且$a\cap\Phi=\{M_1, M_2\}$．证明，数$C_\Phi^A=\overrightarrow{AM_1}\times\overrightarrow{AM_2}$* 与割线$a$的选取无关（此数叫作点$A$关于球面$\Phi$的次数）．

863．写出过点$M(3,3,-1)$并且与平面：

$$2x-2y-z+5=0$$

相切于点$M_0(-1,1,1)$的球面方程。

864．由下列方程组给出了圆γ：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=0 . \end{cases}$$

并给出了平面：

$$Ax+By+Cz+D=0 \ (A^2+B^2\neq 0) .$$

证明：

$$\Pi\cap\gamma\neq\varnothing\Longleftrightarrow\frac{D^2}{A^2+B^2}\leqslant R^2 .$$

865．已知一球面和直线

$$x=1+3t,\quad y=-4+6t,\quad z=6+4t$$

相切于点$M_1(1,-4,6)$，而和直线

---

* 原题有误已更正——译者注。

$$x=4+2t,\quad y=-3+t,\quad z=2-6t$$
相切于点$M_2(4,-3,2)$．写出该球面方程。

866　已知一四面体的各顶点$S\left(-\frac{11}{3},\ 4,\ -\frac{22}{3}\right)$，$A(-2,1,1)$，$B(-1,-4,-2)$，$C\left(3,\frac{8}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$．求此四面体内切球面的方程。

867．已知二圆的方程：

$$\gamma_1:\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4y-2z-28=0, \\ 2x-y-2z+1=0; \end{cases}$$

$$\gamma_2:\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2y+4z-22=0, \\ 2x+2y+z+4=0. \end{cases}$$

证明：$\gamma_1\cap\gamma_2\neq\varnothing$，并写出过圆$\gamma_1$，$\gamma_2$的球面方程。

868．已知椭圆面Φ的三条对称轴是标准正交标架的各轴并且还知它过下列两条曲线：

$$\gamma_1:\quad y=0,\ \frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1,\qquad 和$$

$$\gamma_2:\quad x=0,\ \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$

写出该椭圆面Φ的方程。

869．已知一椭圆面的三条对称轴是标准正交标架的各轴．如果它过点$M(3,2,5)$及椭圆：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

写出该椭圆面方程。

870．已知一椭圆面的各半轴$|O'A_1|=4$，$|O'B_1|=2$，$|O'C_1|=1$，如果还知道它的各个对称平面：

$$\Pi_1:\ x+y+z-1=0,$$

$$\Pi_2: x+y-2z=0,$$

$$\Pi_3: x-y+1=0,$$

并且$(O'A_1)=\Pi_1\cap\Pi_2$，$(O'B_1)=\Pi_1\cap\Pi_3$，$(O'C_1)=\Pi_2\cap\Pi_3$。写出该椭圆面方程。

871．已知椭圆面的二顶点$A_1(3,0,0)$，$A_2(-2,0,0)$，并知它与平面yOz交成椭圆：

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

写出该椭圆面方程。

872．证明：椭圆面的任意三个两两垂直的半径长的平方倒数之和，等于它的三个半轴倒数的平方和。(把一端在椭圆面上、另一端是它中心的线段叫作椭圆面的半径)。

873．设点O是椭圆面Φ的中心。点$M_0\in\Phi$，如果点$M\in[OM_0]\setminus\{M_0\}$，且$M\notin\Phi$，则称点$M$是椭圆面$\Phi$的内点。已知椭圆面的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

证明：点$M_1(x_1,y_1,z_1)$是Φ的内点，当且仅当

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}<1.$$

874．证明：过椭圆面内点的每条直线与它相交两个不同点。

875．证明：若相异两点M_1，M_2属于椭圆面Φ，则位于M_1和M_2之间的任何点M是椭圆面Φ的内点。

876．已知椭圆面Φ的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

和平面Π的方程：

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

证明：$\gamma=\Pi\cap\Phi$ 是椭圆型二次曲线，再求出它的中心M_0。

877．已知椭圆面Φ和平面Π，作平行于平面Π且与椭圆面Φ相交的平面，求由所有截线的中心所组成的图形。

878．证明：平面与椭圆面交成椭圆，当且仅当它过椭圆面的内点。

879．已知椭圆面Φ的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

和平面Π的方程：

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

证明：平面Π与椭圆面Φ交成椭圆，当且仅当：

$$D^2<A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2.$$

880．证明：由方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

给出的平面与椭圆面：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

相切，当且仅当下列等式成立：

$$A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2=D^2.$$

881．已知椭圆面Φ的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

及平面Π的方程：

$$Ax+By+Cz+D=0\ (D\neq0).$$

写出和椭圆面Φ相切的平面$\Pi'\parallel\Pi$的方程，并使椭圆面Φ的中心位于Π和Π′之间。

882．给出了椭圆面Φ的方程：

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}=1,$$

及直线l的方程：

$$\begin{cases}2x-y=0,\\ z-9=0,\end{cases}$$

和一点$M_0(-3,1,1)$.写出过直线l，不与线段$[OM_0]$相交的椭圆面Φ的切平面方程.

883. 已知椭圆面Φ的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

及直线l的方程：

$$x=x_0+a_1t,\quad y=y_0+a_2t,\quad z=z_0+a_3t.$$

求下述命题的充要条件：

(1) $\Phi\cap l=\{M_1,\ M_2\}$，$M_1\neq M_2$；

(2) $\Phi\cap l=\{M\}$；

(3) $\Phi\cap l=\varnothing$.

884. 已知点$M_1(0,0,3)$及椭圆面Φ的方程：

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1.$$

从点M_1向Φ引切线，写出由全部切线上的点组成的图形Φ_1的方程。

885. 由方程给出了两个椭圆面

$$\Phi_1:\ \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1,$$

$$\Phi_2:\ \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}+\frac{z^2}{c_2^2}=1.$$

作和椭圆面Φ_1相切而和Φ_2相交的平面。写出由全部截线的中心组成的图形的方程。

§ 3 双曲面

本节各习题里的坐标系是笛卡儿直角坐标系。

886．设单叶双曲面 Φ 的对称轴是标准正交标架的三个轴，并且 Φ 过椭圆 γ_1：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,\\ z=0\end{cases}$$

和双曲线 γ_2：

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{5}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

写出双曲面 Φ 的方程。

887．已知单叶双曲面的对称轴是标准正交标架的三个轴。并且它过点 $M_1(3,4,3)$ 和曲线：

$$\begin{cases}25x^2-16z^2=144,\\ x=y.\end{cases}$$

写出该单叶双曲面的方程。

888．已知平面 Π，点 $F\notin\Pi$ 和数 $e>0$，$e\neq1$．求图形

$$\Phi=\left\{M\,\Big|\,\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,\Pi)}=e\right\}.$$

889．给出了一球面方程：

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

及二直线 l_1，l_2 的方程：

$$\begin{cases}x=1,\\ y=0,\end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases}x=-1,\\ z=0.\end{cases}$$

作与球面相切并与 l_1，l_2 相交的直线。写出由所有这样直线的点组成的图形的方程。

890．给出了两条相错且垂直的直线 l_1，l_2，以及数 $k\neq1$ $(k>$

0)。求图形

$$\Phi=\{M \mid \rho(M,l_1)=k\rho(M,l_2)\}.$$

891．由方程给出两条直线：

$$l_1:\begin{cases}2x-2y-3z-6=0,\\2x+2y+3z-6=0;\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}2x-2y-3z+6=0,\\2x+2y+3z+6=0.\end{cases}$$

证明l_1，l_2是相错直线。设平面$\Pi_1\supset l_1$和$\Pi_2\supset l_2$垂直相交，求两个平面交线上的点组成的图形Φ。

892．证明：单叶双曲面的切平面与它交成两条直母线。

893．由方程给出平面Π：

$$Ax+By+Cz+D=0\ (D\neq 0).$$

证明：平面Π是单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

的切平面，当且仅当下列等式成立：

$$A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2=D^2.$$

894．由方程给出单叶双曲面Φ：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

和平面Π：

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

记$\gamma=\Pi\cap\Phi$，$\alpha=A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2$。证明：

（1）γ是二次曲线；

（2）γ是有心曲线，当且仅当$\alpha\neq 0$，并求出它的中心坐标。

895．由方程给出单叶双曲面Φ：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

及平面Π：

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

记$\gamma=\Pi\cap\Phi$，$\alpha=A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2$。证明：

（1）（γ是双曲线）$\Longleftrightarrow$($\alpha>0$，$\alpha\neq D^2$)；

（2）（γ是椭圆）$\Longleftrightarrow\alpha<0$；

（3）（γ是抛物线）$\Longleftrightarrow$($\alpha=0$，$D\neq0$)；

（4）（γ是一对平行直线）$\Longleftrightarrow$($\alpha=D=0$)。

896．证明：单叶双曲面的切平面与它的渐近锥面交成双曲线。

897．证明双叶双曲面的切平面与它的渐近锥面交成椭圆。

898．由方程给出三条直线：

$$l_1:\begin{cases}x=a,\\y=bt,\\z=ct;\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}x=-a,\\y=-bt,\\z=ct;\end{cases}\qquad l_3:\begin{cases}x=-at,\\y=b,\\z=ct\end{cases}$$

($a\cdot b\cdot c\neq0$)。证明：它们两两互为相错直线，再写出与其中每条直线都相交的所有直线上的点组成的图形之方程。

899．设Π是单叶双曲面Φ的渐近锥面Φ'的切平面。证明：Π与Φ交成两条平行直线，并且这两条平行直线关于直线$l=\Pi\cap\Phi'$对称。

900．已知点$M_0(5,3,2)$及由方程给出的曲面：

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1,$$

求该曲面的过点M_0的直母线方程。

901．证明：单叶双曲面的直母线在它的腰椭圆所在平面上正射影与该椭圆相切。

902．由方程给出双叶双曲面Φ：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

及平面Π

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

证明：曲线$\gamma=\Pi\cap\Phi$是二次曲线，并求它的中心。

903．已知双叶双曲面的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

及平面Π的方程：

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

确定它们相交的截线的类型。

904．由方程给出平面：

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

及双叶双曲面：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

证明：平面与此双叶双曲面相切，当且仅当

$$A^2a^2-B^2b^2-C^2c^2=D^2.$$

905．已知两点F_1，F_2，它们之间的距离等于$2c>0$，并已知数$a>0$．求图形：

（1）$\Phi_1=\{M|\rho(M,F_1)+\rho(M,F_2)=2a>2c\}$；

（2）$\Phi_2=\{M||\rho(M,F_1)-\rho(M,F_2)|=2a<2c\}$.

906．证明双叶双曲面没有直母线。

§4 抛物面

本节各习题里的坐标系是笛卡儿直角坐标系。

907．求到给定平面Π和定点$F\notin\Pi$等距的全部点组成的图形。

908．已知两条相错直线l_1，l_2．求图形

$$\Phi=\{M|\rho(M,l_1)=\rho(M,l_2)\}.$$

909．设球面与平面yOz及球面

$$(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$$

均相切，并且这些球面都属于半空间$x\geq 0$．求由这样的诸球面之球心组成的图形的方程。

910．已知两抛物线方程：

$$\gamma_1:\ \begin{cases} y^2=2x, \\ z=0, \end{cases} \qquad \gamma_2:\ \begin{cases} z^2=-2x, \\ y=0 \end{cases}$$

及平面Π：

$$y-z=0.$$

求与两抛物线γ_1，γ_2均相交且平行于平面Π的全部直线上的点组成的图形。

911．证明：平面Π是双曲抛物面的切平面，当且仅当它们交成两条直母线。

912．写出一平面方程，它平行已知平面Π：

$$x-y+z-5=0,$$

并且与抛物面

$$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=2y$$

交成两条直母线，并求这两条直母线的方程。

913．求抛物面$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=2z$的且与平面$6x+4y-8z+1=0$相平行的直母线方程。

914．由方程给出了抛物面Φ：

$$x^2-z^2=2y,$$

求Φ面上全部这样的点组成的图形Φ_1，使过这些点的直母线互相垂直。

915．求平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

与抛物面

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

相切的充要条件。

916. 证明：椭圆抛物面没有直母线。

917. 已知两条直线方程

$$l_1:\ \begin{cases} x+z=0, \\ y=0; \end{cases} \qquad l_2:\ \begin{cases} x-y-z=0, \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

及平面Π：

$$x-z=0.$$

求与两条直线l_1，l_2均相交并且平行平面Π的全部直线的点组成的图形。

918. 证明：双曲抛物面与平面不能截成椭圆。

919. 证明：椭圆抛物面与平面不能截成双曲线。

第四章　n维仿射空间和n维欧氏空间

§1　n维仿射空间

920. 证明点A，B，C属于一条直线：

(1) $A(2,1,-2,0)$，$B(1,-3,-3,1)$，$C(4,9,0,-2)$；

(2) $A(0,-3,0,2)$，$B(1,1,-1,-2)$，$C(-1,-7,1,6)$．

921. 已知两点A与B．求直线(AB)与坐标超平面交点的坐标。

(1) $A(1,3,-1,2)$，$B(-1,-2,1,3)$；

(2) $A(1,-1,2,-2)$，$B(3,2,-3,1)$．

922. 证明：点A，B，C，D属于一个平面：

(1) $A(2,1,-3,4)$，$B(0,1,-2,17)$，$C(3,-2,-1,0)$，$D(2,-5,2,9)$；

(2) $A(0,-1,1,2)$，$B(-1,4,0,1)$，$C(-2,1,-3,-1)$，$D(-1,12,2,2)$．

923. 在5维仿射空间里，给出平面：

$$\Pi=\{M_0,\vec{a},\vec{b}\}.$$

在标架$R=(O,\vec{e}_i)$下，写出平面Π的参数方程和一般方程，设已知

$M_0(2,0,1,0,-1)$，$\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3+\vec{e}_4+\vec{e}_5$，

$\vec{b}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3-2\vec{e}_4+3\vec{e}_5$．

924. 给出不属于一条直线的三个点A，B，C，并且又给出了也不属于一条直线的三个点A_1，B_1，C_1：

$A(1,-1,4,-2)$，$B(0,3-4,3)$，$C(2,1,0,-1)$，

$A_1(0,1,-1,3)$，$B_1(-6,-1,-2,-3)$，$C_1(-4,0,-1,0)$．

求平面(ABC)和$(A_1B_1C_1)$交点的坐标。

925. 五点A，B，C，D，E是否属于一个超平面：

(1) $A(1,1,-2,2)$, $B(-3,1,4,4)$, $C(-1,2,3,6)$, $D(0,2,-1,3)$, $E(-1,0,1,2)$;

(2) $A(0,1,3,-3)$, $B(-1,0,2,2)$ $C(2,1,0,4)$, $D(-2,-1,3,0)$ $E(-1,1,2,-2)$?

926. 证明两条直线(AB)和(CD)相平行:

(1) $A(2,1,-1,2)$, $B(-1,0,3,1)$, $C(6,2,8,-2)$, $D(3,1,12,-3)$;

(2) $A(0,1,2,3)$, $B(1,0,3,2)$, $C(2,4,3,6)$, $D(-1,7,0,9)$.

927. 证明平面(ABC)平行于平面$(A_1B_1C_1)$:

(1) $A(2,-1,0,4)$, $B(-1,2,0,3)$, $C(3,0,1,1)$,
$A_1(1,1,1,1)$, $B_1(8,-4,-4,6)$, $C_1(-3,3,3,0)$;

(2) $A(1,2,0,-1)$, $B(2,1,-1,0)$, $C(0,3,-4,1)$,
$A_1(2,0,1,-3)$, $B_1(2,0,11,-9)$, $C_1(3,-1,-5,1)$.

928. 给出了两条直线(AB)和(CD)。说明它们的相互位置关系:

(1) $A(1,3,0,-1)$, $B(0,2,1,4)$, $C(1,0,-1,0)$, $D(3,2,-3,-10)$;

(2) $A(5,-3,2,1)$, $B(2,-1,-3,0)$, $C(11,-7,12,3)$, $D(2,-1,-3,0)$;

(3) $A(4,0,-1,2)$, $B(0,3,2,1)$, $C(1,-1,-1,0)$, $D(2,-1,-4,-5)$;

(4) $A(-2,2,-2,2)$, $B(7,-1,7,-1)$, $C(-1,2,3,-4)$, $D(5,-1,-3,11)$.

929. 给出不位于一个超平面的、两两相错的三条直线(AB), (CD), (EF). 证明，存在唯一的直线p，与已知的每条直线位于一个平面内。

930. 在空间A_4里，就标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$写出由下列各点所确定的平面方程:

$M_0(1,-2,3,-1)$, $M_1(2,1,0,1)$, $M_2(0,-2,1,0)$.

931．在空间A_5里，就标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$写出由下列各点所确定的平面的参数方程：

$M_0(1,3,-1,4,5)$，$M_1(2,3,-1,4,5)$，$M_2(-1,0,1,-1,1)$．

932．在仿射空间A_n里，给定了标架$(O,\vec{e}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$．证明：向量$\vec{a}=a^i\vec{e}_i$平行于超平面Π_{n-1}：

$$b_ix^i+b=0,$$

当且仅当 $$a^ib_i=0\ .$$

933．在n维仿射空间里给出两个平面：

$$\Pi_p=[M_0,V'],$$
$$\Pi'_q=[M'_0,V'']\ (p<q).$$

设$(\vec{a}_i)$及$(\vec{b}_j)$是空间V'和V''的基底，并设

$$s=\text{秩}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_q),$$
$$r=\text{秩}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_q,\overrightarrow{M_0M'_0});$$
$$\tilde{V}=V'\cap V'',\qquad \dim\tilde{V}=m.$$

证明：

(1) $\Pi_p\cap\Pi'_q\neq\varnothing\Longleftrightarrow r=s=p+q-m$；

(a) $\Pi_p\cap\Pi'_q=\Pi''_m\Longleftrightarrow r=s<p+q$，

(b) $\Pi_p\cap\Pi'_q=\{M\}\Longleftrightarrow r=s=p+q$；

(2) $\Pi_p\cap\Pi'_q=\varnothing\Longleftrightarrow r=s+1=p+q-m+1$；

(a) (Π_p，Π'_q有公共方向)$\Longleftrightarrow r=s+1<p+q+1$，

(b) (Π_p与Π'_q相错)$\Longleftrightarrow r=s+1=p+q+1$．

934．证明：如果在仿射空间A_n里，一般位置点组$M_0,M_1,\cdots,M_p$属于平面Π_p，而一般位置点组$B_0,B_1,\cdots,B_q$属于平面Π'_q，则二平面Π_p，Π'_q相错，当且仅当点组$M_0,M_1,\cdots,M_p,B_0,B_1,\cdots,B_q$在空间$A_n$里也是一般位置点组。

935．证明：对域K上的每个向量空间V以及仿射空间E，如果按照规则：$\sigma(\vec{a},\vec{b})=\vec{b}-\vec{a}$，$\forall\vec{a}$、$\vec{b}\in V$建立映射$\sigma:E\times E\to V$，则$V$可看作$E$，即$E=V$．

936．直线m过点$M(10,3,-9,-13)$并与给定的直线(AB)和给定的平面Π_2相交。计算点$m\cap(AB)$和点$m\cap\Pi_2$的坐标，假设：

$A(-1,0,2,3)$，$B(2,1,-1,0)$，

$$\Pi_2:\begin{cases}x^1+x^2-x^3=0,\\ 2x^2+2x^3-x^4-3=0.\end{cases}$$

937．证明：仿射空间A_n的每个平面：

$$\Pi_k=[M_0,V'],\qquad \dim V'=k,$$

都是具有平移空间V'的k维仿射空间A_k．

938．设仿射空间A_n的平面Π_2与超平面Π'_{n-1}没有公共点。证明Π_2平行于Π'_{n-1}．

939．在A_4里给出了三个超平面：

$$\Pi:\ 2x^1+3x^2-x^3+x^4-1=0,$$

$$\Pi':\ x^1-2x^2+x^3-x^4+3=0,$$

$$\Pi'':\ x^1+12x^2-5x^3+5x^4-8=0.$$

证明它们交成平面。

940．求超平面Π和射线$[AM)$的交集：

（1）Π：$3x^1+2x^2+x^3-2x^4+4=0$，

$[AM)$：$x^1=1+t$，$x^2=-1-2t$，$x^3=3t$，$x^4=2+t$，$t\geqslant 0$；

（2）Π：$x^1-2x^2+x^3+x^4-13=0$，

$[AM)$：$x^1=t$，$x^2=1-t$，$x^3=2+t$，$x^4=-1+3t$，$t\geqslant 0$．

941．在仿射空间A_n里，给出了二平面：

$$\Pi_p=[M_0,V],$$

$$\Pi'_q=[M'_0,V'].$$

证明：在A_n里存在一个维数最小的平面过所给二平面，并求它的维数。

942．已知单纯形$A_1A_2A_3A_4A_5$．一直线与它的侧面所在平面相交于点B_1，B_2，B_3，B_4，B_5．证明：诸线段$[A_1B_1]$，$[A_2B_2]$，$[A_3B_3]$，$[A_4B_4]$，$[A_5B_5]$的中点属于一个超平面。

943．在空间A_5里，就标架$(O,\bar{e}_i)$ $(i=1,2,3,4,5)$给出两个平面的方程：

Π_2：$x^1=1+2\lambda^1-3\lambda^2$　　Π'_2：$x^1=2-\lambda^1+\lambda^2$

$x^2=1+\lambda^1-\lambda^2$　　$x^2=4+2\lambda^1-\lambda^2$

$$x^3 = 2 - \lambda^1 + 2\lambda^2 \qquad x^3 = 3\lambda^1 + \lambda^2$$
$$x^4 = 1 + \lambda^1 + 2\lambda^2 \qquad x^4 = 2 + \lambda^1 + 2\lambda^2$$
$$x^5 = 3\lambda^1 - \lambda^2, \qquad x^5 = 1 + \lambda^1 + \lambda^2.$$

确定平面Π_2与Π'_2的相互位置关系。

944．证明：在仿射空间A_n里，有唯一的k维平面通过其中$k+1$个一般位置的点($k<n$)，并且在空间A_n里的每个k维平面上，都有$k+1$个一般位置的最大点组。

945．已知直线(AB)及与它相错的平面(PQR)．求线段$[MN]$中点的集合，其中：$M\in(AB)$，$N\in(PQR)$．设它们各点的坐标为：

$A(1,1,1,-1)$，$B(2,-1,0,0)$，$P(0,0,2,1)$，$Q(3,-1,2,1)$，$R(-2,1,-1,3)$．

946．在空间A_4里，就标架$(O,\vec{e}_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 由方程给出两个平面：

$$\Pi_2:\ \begin{cases} x^1 - 3x^2 - 2x^3 + 3 = 0, \\ 3x^2 + 2x^3 - x^4 - 4 = 0 \ ; \end{cases}$$

$$\Pi'_2:\ \begin{cases} x^1 + x^2 - 3x^3 + x^4 = 0 \ , \\ 2x^1 + x^2 - 3x^3 - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

证明：二平面Π_2，Π'_2交成直线，并求该直线的方程。

947．在四维仿射空间里，给出了四条两两相错的直线，并且它们既不位于一个超平面上，而且也没有割直线。证明：过任意点能作与四条直线都相交的两个平面。

948．在仿射空间A_4里，确定平面Π_2，Π'_1的相互位置关系，如果就标架$(O,\vec{e}_i)$已给出它们的方程：

$$\Pi'_1:\ \begin{cases} x^1 = 1 + 2\lambda^1 \\ x^2 = -1 - \lambda \\ x^3 = 2 + \lambda^1 \\ x^4 = -2 + \lambda^1, \end{cases} \qquad \Pi_2:\ \begin{cases} x^1 + x^2 - 2x^3 + x^4 - 1 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 - 2x^4 + 7 = 0. \end{cases}$$

949．设A，B，C是仿射空间A_n中属于一条直线的三个不

同点。证明：三点A，B，C之中有一个点位于其它两点之间。

950．证明：仿射空间A_n中的点组：

$$A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_k\ (1<k\leqslant n)$$

是一般位置点组，当且仅当诸向量：

$$\overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_0A_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{A_0A_k}$$

线性无关，并且与在所给的点中取谁作A_0无关。

951．就空间A_4的标架$(O,\ \vec{e}_i)$，给出了诸点$A_0(1,0,1,0)$，$A_1(2,1,2,1)$，$A_2(0,0,1,2)$，$A_3(1,2,1,-1)$．证明：该点组是空间A_4中的一般位置点组。

952．已知五个一般位置点A，B，C，D，E．证明，过线段$[AB]$，$[BC]$，$[DE]$，$[CD]$中点的超平面平行于直线(AE)．

953．在四维仿射空间里，已知五个一般位置点A、B、C、D、E．各点P，Q，R，S，T按比值λ_1，λ_2，λ_3，λ_4，λ_5分别分割线段$[AB]$，$[BC]$，$[CD]$，$[DE]$，$[EA]$．证明：这些点属于一个超平面的充要条件，是下列等式成立：

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4\cdot\lambda_5=-1\ .$$

954．证明：若仿射空间A_n中的$k+1$个一般位置的点，属于两个平面Π_k和$\Pi_l'(k\leqslant l)$，则：

$$\Pi_k\subset\Pi_l.$$

955．证明：若仿射空间A_n中的两个相异超平面Π_{n-1}，Π'_{n-1}有一公共点，则$\Pi_{n-1}\cap\Pi'_{n-1}=\Pi''_{n-2}$.

956．证明：平面Π''_{p+q+1}恒过二相错平面$\Pi_p=[M_0,V']$和$\Pi'_q=[M'_0,V'']$ $(p+q<n-1)$，并且不存在平面$\Pi'''_k\supset\Pi_p$，$\Pi'''_k\supset\Pi'_q$，$k\leqslant p+q$.

957．设仿射空间A_n中的一点B，不属于平面$\Pi_k=[M_0,V']$．证明：存在唯一平面Π_{k+1}过点B和平面Π_k.

958．设在仿射变换下超平面Π不动。证明：如果这个变换将点X变成点$X_1\neq X$，并且$\Pi\cap(XX_1)=X_0$，则在此变换下，点X_0分线段$[XX_1]$的比值是定数。

959．就仿射变换f有：

$f(O)=O$，$f(A)=A$，$f(B)=B$，$f(C)=C$，$f(M)=M_1$。根据所指各点的坐标，写出这个仿射变换公式：

$O(0,0,0,0)$，$A(1,0,0,0)$，$B(0,1,0,0)$，$C(0,0,1,0)$，$M(1,1,1,1)$，$M_1(2,3-2,4)$。

960．证明：如果仿射空间A_n里的两个相异平面Π_p和Π'_p都属于平面Π''_{p+1}，并且$\Pi_p\cap\Pi'_p\neq\varnothing$，则$\Pi_p\cap\Pi'_p=\Pi''_{p-1}$。

961．证明：过不属于仿射空间A_n之平面$\Pi_k=[M_0,V']$的点B，有唯一的平面Π'_k平行于平面Π_k。

§2　n维欧氏空间

在962—971各题中的标架是标准正交标架。

962．计算点M在超平面Π上的正射影M_1的坐标：

（1）$M(1,1,1,-1)$，　　$\Pi: x^1+x^2-2x^3+x^4-1=0$；

（2）$M(0,-1,2,1)$，　　$\Pi: 2x^1+x^2+x^4-3=0$。

963．计算点A到超平面Π的距离：

（1）$A(1,-1,2,1)$，　　$\Pi: x^1+3x^2-x^3-x^4+2=0$；

（2）$A(2,3,-1,4)$，　　$\Pi: x^1-x^2+2x^3+x^4+1=0$。

964．计算点$M(1,-2,3,-1)$在下列直线上正射影的坐标：

$x^1=\lambda-2$，$x^2=-\lambda+2$，$x^3=2\lambda+1$，$x^4=-3\lambda$。

965．计算点$M(2,-1,3,1)$ 在下列平面上正射影的坐标：

$$\begin{cases}x^1+x^2+x^3-x^4+1=0\\ 2x^1+x^2-2x^3+x^4+2=0.\end{cases}$$

966．计算点A到直线l的距离：

（1）$A(1,1,-2,1)$，

l：$x^1=\lambda$，$x^2=-\lambda+1$，$x^3=\lambda+2$，$x^4=2\lambda-1$；

（2）$A(3,1,-1,1)$，

l：$x^1=-\lambda$，$x^2=\lambda+2$，$x^3=-\lambda+1$，$x^4=2\lambda$。

967．计算点A到平面Π_2的距离：

(1) $A(2,3,-1,1)$, Π_2: $\begin{cases} x^1+x^2-x^3+x^4=0 \\ -x^1+2x^2+x^3-1=0; \end{cases}$

(2) $A(3,-1,1,0)$, Π_2: $\begin{cases} x^1+2x^2+x^4=0 \\ -2x^1+1=0. \end{cases}$

968. 计算直线(AB)到平面(PQR)的距离:

(1) $A(2,1,0,0)$, $B(-1,2,3,1)$,

$P(0,0,0,1)$, $Q(-2,1,-1,0)$, $R(1,1,1,-1)$.

(2) $A(0,0,0,0)$, $B(-3,2,1,1)$,

$P(1,1,1,1)$, $Q(2,-3,-1,1)$, $R(-1,1,2,-2)$.

969. 根据三角形ABC顶点的坐标计算它的面积:

(1) $A(0,0,1,2)$, $B(1,-1,2,-2)$, $C(1,1,-3,0)$;

(2) $A(0,1,1,1)$, $B(-2,1,0,0)$, $C(-1,2,3,-2)$.

970. 计算单纯形$ABCDE$的外接超球面球心的坐标，该单纯形各顶点的坐标是:

$A(0,0,1,1)$, $B(-1,1,0,0)$, $C(2,1,0,-1)$, $D(1,1,2,3)$, $E(-2,1,3,-1)$.

971. 写出直线(AB)和平面(PQR)的公垂线的方程:

(1) $A(1,1,1,1)$, $B(-2,-1,1,3)$, $P(2,1,-1,0)$, $Q(3,1,0,-1)$, $R(0,0,-1,1)$;

(2) $A(0,0,1,1)$, $B(2,-1,0,0)$, $P(3,1,0,-2)$, $Q(-2,0,-1,3)$, $R(1,1,1,-1)$.

972. 设V是域R上的n维向量空间，V'和V''是它的维数分别为p、q的子空间。将向量$\vec{n}\in V$称作是空间V''的正交（垂直）向量，如果它正交于$\forall \vec{x}\in V''$（记作$\vec{n}\perp V''$）. 将空间V'叫作空间V''的正交空间，如果$\forall \vec{x}\in V'$, $\vec{x}\perp V''$（记作$V'\perp V''$）. 如果$V'\perp V''$、并且$p+q=n$，则把空间V'，V''中的一个称作是另一个的正交补空间。

欧氏空间E_n的平面$\Pi_p=[M_0,V']$称作是平面$\Pi'_q=[M'_0,V'']$的垂直平面（记作$\Pi_p\perp\Pi'_q$），如果$\exists\ \vec{x}\in V'\,|\,\vec{x}\perp V''$ $(\vec{x}\neq\vec{0})$.

如果$V'\perp V''$，就把Π_p叫作平面Π'_q的完全正交平面。

证明：在欧氏空间E_n中过任意点B，有唯一平面Π'_{n-p}完全正交平面Π_p，并且$\Pi'_{n-p}\cap\Pi_p=\{M\}$。

973．证明：欧氏空间E_n的、和平面Π_p完全正交的两个任意相异平面Π'_{n-p}与Π''_{n-p}平行且$\Pi'_{n-p}\cap\Pi''_{n-p}=\varnothing$。把直线$\Pi'_1\perp\Pi_k$并且$\Pi'_1\cap\Pi_k=\{M\}$叫作欧氏空间$E_n$的平面$\Pi_k$的垂线。证明：过欧氏空间$E_n$的一点$B$，平面$\Pi_k\ni B$有唯一的垂线。

974．写出关于超平面：

$$x^1+x^2+x^3+x^4=0$$

的对称变换公式。

975．证明：欧氏空间E_n的k维平面$\Pi_k=[M_0,V']$，是具有平移空间V'的k维欧氏空间E_k。

976．写出关于各轴：

$$x^1=1+\lambda,\quad x^2=2-\lambda,\quad x^3=-1+2\lambda,\quad x^4=-2\lambda$$

的对称变换公式。

977．在空间E_4里给出四条交于一点、两两垂直的直线。证明：关于这些直线的轴对称合成是恒等变换。

978．证明：空间E_n的相错两平面Π_p和Π'_q有唯一的公垂线。

979．在空间E_4中给出两两垂直的、相交成某条直线l的三个超平面。证明：关于这三个超平面的对称合成是关于直线l的轴对称。

980．在E_4中给出超平面Π及属于它的一点A。证明：关于Π和A的对称合成是关于轴l的对称，这里的l是过点A垂直于Π的直线。

981．在欧氏空间E_4中，就标准正交标架$(O,\bar{e}_i)$给出了平面方程：

$$\Pi_2:\ \begin{cases}2x^1+x^2+x^3-x^4+5=0\\ x^1+x^2-2x^3+2x^4-1=0\end{cases}$$

及点$M_0(1,-3,2,5)$．写出与Π_2完全正交的平面$\Pi'_2\ni M_0$的方程。

982．证明：在欧氏空间E_n中，过已知点M'_0并且垂直给

定平面Π_p的全部直线上的点集，是与平面Π_p完全正交的平面Π'_{n-p}.

983. 在欧氏空间E_n中，就标准正交标架$(O,\vec{e}_i)$，由方程给出了超平面Π_{n-1}：

$$b_i x^i + b = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

证明：向量 $\vec{n} = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e}_i$垂直于平面$\Pi_{n-1}$.

984. 在E_4中给出了单纯形$A_1A_2A_3A_4A_5$. 假设已知它的全部棱长，计算棱$[A_1A_2]$的中点到所对侧面$A_3A_4A_5$重心的距离。

985. 假设已知单纯形$A_1A_2A_3A_4A_5$的全部棱长，计算侧面$A_1A_2A_3$的重心到侧面$A_1A_4A_5$的重心间的距离。

986. 证明：在欧氏空间E_n中，过任意点B有唯一平面Π_{n-p}与平面Π_p完全正交。

987. 证明：如果单纯形$A_1A_2A_3A_4A_5$的两条高线$[A_1B_1]$和$[A_2B_2]$相交，则棱$[A_1A_2]$垂直于所对侧面$A_3A_4A_5$.

988. 过单纯形的每个侧面的重心，作垂直于对棱的超平面。证明：所有这些超平面过同一点。

989. 已知单纯形$A_1A_2A_3A_4A_5$，其中有$(A_1A_2)\perp(A_3A_4A_5)$，$(A_2A_3)\perp(A_4A_5A_1)$，$(A_3A_4)\perp(A_5A_1A_2)$，$(A_4A_5)\perp(A_1A_2A_3)$. 证明：$(A_5A_1)\perp(A_2A_3A_4)$.

990. 在E_4中一直四面形角$Sabcd$与一超平面相交于点A,B,C,D. 证明：四面体$ABCD$的体积之平方等于四个四面体$SABC$，$SBCD$，$SCDA$，$SDAB$的体积之平方和。

991. 给出了两个单纯形$A_1A_2A_3A_4A_5$和$B_1B_2B_3B_4B_5$. 证明：如果

$$(A_1A_2)\perp(B_3B_4B_5),\quad (A_2A_3)\perp(B_4B_5B_1),$$
$$(A_3A_4)\perp(B_5B_1B_2),\quad (A_4A_5)\perp(B_1B_2B_3),$$

则有$(A_5A_1)\perp(B_2B_3B_4)$.

992. 在E_4中给出了两个单纯形。过第一个单纯形的各顶点，引垂直于第二个单纯形各超侧面所在超平面的直线，证明：如果

这些直线相交于一点．则过第二个单纯形各顶点引垂直于第一个单纯形各超侧面所在超平面的诸条直线也相交于一点。

993．在E_4中，给出具有整数坐标的17个点。证明：以已知点为端点的各线段中，至少有一个线段的中点也具有整数坐标。

994．在E_4中给出一个点，它的标准正交坐标都是彼此不同的。将已知点坐标进行全排列的结果作为点的坐标，共得出24个点。证明：这24个点属于一个球面。

995．设V是欧氏空间E_n的平移空间，$\vec{a}_i \in V$，$(\vec{e}_i)$是V的标准正交基，并且$\vec{a}_i = a_i^j \vec{e}_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$．将行列式$\det||a_i^j||$称作是$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$的混合（或斜）积，并记作$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$．说空间$V$的基底$(\vec{e}_i)$与基底$(\vec{e}_i')$是一致（相反）定向的，如果从基底$(\vec{e}_i)$转变成为基底$(\vec{e}_i')$ $(\vec{e}_i' = c_i^j \vec{e}_j)$ 的矩阵所具有的行列式$\det||c_i^j|| > 0$ $(\det||c_i^j|| < 0)$。空间V的全部基底能分成两类：任何两个基底是一致定向的归为一类，而两个基底是相反定向的属于不同类。把其中每一类的定向都称作是向量空间V的定向。

证明，如果把一个标准正交基$(\vec{e}_i)$换成另一个标准正交基$(\vec{e}_i')$，若$(\vec{e}_i)$和$(\vec{e}_i')$是一致定向的，则混合积$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$不变，如果它们是相反定向的，则变号。

996．在n维欧氏空间$E_n (n > 1)$中，取标准正交基$(\vec{e}_i)$，再取$(n-1)$个向量的有序组：

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_{n-1},$$

其中 $\vec{a}_\alpha = a_\alpha^i \vec{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ \alpha = 1, 2, \cdots, n-1)$．

向量

$$\vec{b} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_{n-1}] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_{n-1}^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \vec{e}_n$$

叫作向量$\vec{a}_i$的向量积。把它改写成记号形式的行列式：

$$\vec{b}=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & \vec{e}_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & \vec{e}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & \vec{e}_n \end{vmatrix}.$$

证明：如果将基底（$\vec{e}_i$）换成另一个标准正交基底（$\vec{e}_i'$），若这两个基底是一致定向的，则向量积保持不变，若它们是相反定向的，则向量积改变符号。

997．证明：欧氏空间V的向量$\vec{a}_i$的向量积$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_{n-1}]$与每个因子正交。

998．证明：向量积

$$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_{n-1}]=\vec{0},$$

当且仅当向量$\vec{a}_i$线性相关。

999．证明：对n维欧氏空间V的任何两组向量：

$$(\vec{a}_i),(\vec{b}_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,n;\ n>1),$$

有等式成立：

$$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n)=\begin{vmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{b}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_1\cdot\vec{b}_n \\ \vec{a}_2\cdot\vec{b}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_2\cdot\vec{b}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{a}_n\cdot\vec{b}_1 & \vec{a}_n\cdot\vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_n\cdot\vec{b}_n \end{vmatrix}.$$

如果$\vec{a}_i=\vec{b}_i$，就得到：

$$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)^2=\begin{vmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{a}_n\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_n \end{vmatrix}.$$

这个行列式叫做向量（$\vec{a}_i$）的**格莱姆**（Gram）**行列式**，并且记作$G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)$．于是：

$$G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)=0,$$

当且仅当诸向量$\vec{a}_i$线性相关。而若诸向量$\vec{a}_i$线性无关，则

$$G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)>0.$$

1000．证明：对欧氏空间V的任何向量组：

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \cdots,\vec{a}_n(n>1)\ ,$$

有等式成立：

$$(-1)^{n-1}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n)=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_{n-1}]\cdot\vec{a}_n{}^{*}.$$

1001．证明：对n维欧氏空间V的任何向量组：

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\ (n>1)\ .$$

有等式成立：

$$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_{n-1}]^2=G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_{n-1}).$$

1002．设在欧氏空间E_n中有两个图形F和F'．把数

$$\rho(F,F')=\inf_{\substack{M\in F\\ M'\in F'}}\rho(M,M')=\rho(F',F).$$

叫做图形F和F'间的距离。证明：点M_1和平面$\Pi_p=[M_0,V']$间的距离按下列公式来计算：

$$\rho(M_1,\Pi_p)=\frac{|(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p,\overrightarrow{M_0M_1})|}{|[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p]|}$$

或

$$\rho(M_1,\Pi_p)=\sqrt{\frac{G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p,\overrightarrow{M_0M_1})}{G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p)}}.$$

其中$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p$是空间$V'$的基底。

1003．在空间E_5中，就标准正交标架R给出了点$M_1(0,1,2,0,-1)$及平面方程

$$\Pi_2:\ \begin{aligned} x^1&=1+2\lambda^1-\lambda^2\\ x^2&=2-\lambda^1-\lambda^2,\\ x^3&=0\\ x^4&=-1+2\lambda^1+\lambda^2,\\ x^5&=\lambda^2.\end{aligned}$$

求$\rho(M_1,\Pi_2)$.

---

* 原书无$(-1)^{n-1}$今改正——译者注。

1004 在空间E_4中，就标准正交标架R给出两个平行超平面的方程：

$$\Pi_{n-1}:\ a_i x^i + C_1 = 0,$$

$$\Pi'_{n-1}:\ a_i x^i + C_2 = 0.$$

求距离$\rho(\Pi_{n-1},\ \Pi'_{n-1})$.

1005. 在空间E_4中，就标准正交标架R给出了点$M_1(2,-1,1,1)$和平面方程

$$\Pi_2:\ \begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 - x^4 - 5 = 0 \\ x^1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 - 1 = 0. \end{cases}$$

求点M_1到平面Π_2的距离。

1006. 在欧氏空间E_3中，就标准正交标架给出点A和B的坐标。写出将点A变成点B的关于平面的反射公式。

(1) $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$;

(2) $A(2,3,1)$, $B(0,1,3)$.

1007. 写出空间E_3关于平面的反射公式，其中平面是就标准正交标架由下列各方程给出的：

(1) $x+y+z-1=0$;

(2) $2x-y+z=0$;

(3) $Ax+By+Cz+D=0$.

1008. 就标准正交标架给出下列直线方程：

(1) $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x-y=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=-1+t, \\ z=-t. \end{cases}$

写出关于各直线的轴对称公式。

1009.*证明：偶数个中心对称的合成是平移或是恒等变换，而奇数个中心对称的合成仍是中心对称。

1010. 证明：若两个轴对称合成是可换的，则这两个对称轴必相交且互相垂直。

1011. 证明：关于三个平面的反射合成是关于一个平面的反射，当且仅当这三个对称平面属于同一面束。

1012. 给出了三条平行直线a，b，c，证明：关于这三条直线的轴对称的合成，是关于某条直线的轴对称。作出这条直线。

1013. 在什么条件下，关于直线a的轴对称和就一向量$\vec{m}$的平移是可换的？

1014. 证明：两个旋转的合成仍是旋转，当且仅当旋转轴相交或平行、并且转角之和异于360°

1015. 证明，空间E_3的任何位移都能表示成关于平面不多于4次反射的合成。

1016. 证明：以不同中心的两个位似的合成，或是位似或是平移。

1017. 证明：中心不属于一直线的三个位似的合成，或仍是位似或是平移，并且这个位似中心属于过已知各中心的平面，而平移方向平行于该平面。

1018. 证明：任何异于位移的空间相似，都有唯一的不动点。

1019. 证明：任何异于位移的第二类相似，是位似、绕轴旋转和关于平面对称的合成，其中旋转轴通过位似中心，而对称平面过位似中心且垂直于旋转轴。

1020. 证明：任何异于位移的第一类相似，是位似和绕轴旋转的合成，其中旋转轴通过位似中心。

---

* 在1009——1020各题中的移动和相似是在E_3里来讨论的。

第五章　二次形和二次曲面

§1　双线形和二次形

1021．证明：对称双线形$\varphi(\vec{x},\vec{y})$，能用二次形$\varphi(\vec{x},\vec{x})$表出。

1022．已知矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

在域R上，写出各矩阵在四维向量空间所确定的相应的双线形，并计算这些双线形的秩。

1023．就域R上的向量空间V（dim＝4）的某一基底，用下列矩阵给出了双线形φ：

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

计算$\varphi(\vec{x},\vec{y})$，其中

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\qquad \vec{y}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1024．证明：在有限维空间里给出的双线形，能表示成两个线性形的积，当且仅当该双线形矩阵的秩等于一。

1025．对任意向量$\vec{x}$，在$\vec{x}=\vec{y}$时，求使双线形$\varphi(\vec{x},\vec{y})$等于

零的条件。

1026. 如果对称双线形 $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ 是正定的，则关于任意非零向量对 $\vec{p}_1$ 和 $\vec{p}_2$ 有

$$\varphi(\vec{p}_1,\ \vec{p}_2)^2\leqslant\varphi(\vec{p}_1,\ \vec{p}_1)\varphi(\vec{p}_2,\ \vec{p}_2),$$

试证明之。

1027. 解关于 λ 的方程组：

$$\begin{cases}\varphi(\vec{x},\vec{x})=0\\ \vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{b}\end{cases},$$

其中 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}\in V$，$\lambda\in\mathbf{R}$。

1028. 设 $\varphi(\vec{x},\vec{x})$ 是在向量空间中给出的二次形，并且 $\varphi(\vec{a},\vec{a})>0$，$\varphi(\vec{b},\vec{b})<0$。证明：

（1）二向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 线性无关；

（2）在以 $(\vec{a},\vec{b})$ 为基底的二维空间中，存在两个向量 $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，使 $\varphi(\vec{x}_1,\vec{x}_1)=\varphi(\vec{x}_2,\vec{x}_2)=0$；

（3）二向量 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$ 线性无关。

1029. 求二次形

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i^2+2\sum_{i,j=1}^{n} bx_ix_j$$

是正定的充要条件。

1030. 所谓在同一向量空间 V 里的双线形 $\varphi_1(\vec{x},\vec{y})$，…，$\varphi_n(\vec{x},\vec{y})$ 的《n 角形》a 系指形如

$$a=\Big(\varphi_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,\varphi_n(\vec{x},\vec{y})\Big)$$

的 n 元组。

在《n 角形》集合里定义两种运算：

(1) $a+b=(\varphi_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,\varphi_n(\vec{x},\vec{y}))+(\psi_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,\psi_n(\vec{x},\vec{y}))=(\varphi_1\vec{x},\vec{y})+\psi_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,\varphi_n(\vec{x},\vec{y})+\psi_n(\vec{x},\vec{y}))$；

(2) $\lambda a=\lambda(\varphi_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,\varphi_n(\vec{x},\vec{y}))=(\lambda\varphi_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,\lambda\varphi_n(\vec{x},\vec{y}))$.

证明：《n 角形》的集合构成向量空间。

1031. 所谓双线形

$\varphi_k(\vec{x},\vec{y})$ $(k=1,\cdots,n)$ 的 n 角形 $a=(\varphi_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,\varphi_n(\vec{x},\vec{y}))$ 的形心，系指 $a_0=\varphi(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\vec{x},\vec{y})$.

证明形心也是双线形。

1032. 化二次形

$$(x^1)^2+(x^3)^2-2x^1x^2+2x^1x^3+10x^2x^3$$

为标准形。

1033. 化二次形

$$(x^1)^2+4(x^2)^2+8(x^3)^2-(x^4)^2-4x^1x^2+6x^1x^3-$$
$$-12x^2x^3+2x^3x^4+x^2x^5-x^4x^5$$

为标准形。

1034. 把下列各二次形用正交变换化成标准形：

(1) $2(x^1)^2+(x^2)^2+2(x^3)^2-2x^1x^2+2x^2x^3$,

(2) $7(x^1)^2+6(x^2)^2+5(x^3)^2-4x^1x^2-4x^2x^3$,

(3) $(x^1)^2-2(x^2)^2+(x^3)^2+4x^1x^2-8x^1x^3-4x^2x^3$,

(4) $(x^1)^2+5(x^2)^2+(x^3)^2+2x^1x^2+6x^1x^3+2x^2x^3$,

(5) $(x^1)^2-2(x^2)^2+(x^3)^2+4x^1x^2-10x^1x^3+4x^2x^3$.

§2 二次曲面

1035. 在仿射空间A_4里，写出二次曲面的基本类形的标准方程。

1036. 验证在A_4中用标准方程给出的椭圆面，被包含在坐标平行六面体内，这个平行六面体是由向量 $2\vec{e}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3,4)$ 构成的。

1037. 证明，A_4中的锥面：

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2=0$$

是过同一点的非空直线集合的并。

1038. 在仿射空间A_n中，把(x_0^i)称作椭圆面 $\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2=1$ 的

内点，如果$\sum_{i=1}^{4}(x_0^i)^2<1$. 证明：对于椭圆面内点的集合$F$是凸的，即：$A, B\in F\Longrightarrow [AB]\subset F$.

1039. 证明：位于A_4中并由方程

$$A(x^1)^2+B(x^2)^2+C(x^3)^2+D(x^4)^2+E=0 \quad (*)$$

给出的曲面，具有以下性质：

（1）坐标原点是曲面的对称中心；

（2）该曲面对于每个坐标超平面，都是对称分布的；

（3）用平行每个坐标超平面的各超平面去截曲面(*)，就得到了有**中心的二次曲面**。

1040. 设在空间A_n里，给出了有中心的二次曲面：

$$a_{ij}x^ix^j+2a_{0i}x^i+a_{00}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

如果不改变坐标向量，把标架移转到**二次曲面的中心**，则它的方程呈如下形状：

$$a_{ij}x'^ix'^j+\frac{\triangle}{\delta}=0,$$

其中$\delta=\det||a_{ij}||$，　$\triangle=\det\begin{Vmatrix} a_{ij} & a_{i0} \\ a_{0i} & a_{00} \end{Vmatrix}$.

试证明之。

1041. 求在空间A_3里就仿射标架由下列方程所给出的二次曲面的中心：

（1）$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+2x^1x^2-2x^2x^3+6x^1x^3+2x^1-$
$-6x^2-2x^3=0$；

（2）$4x^1x^2+4x^1x^3-4x^2-4x^3-1=0$.

1042. 设在空间A_n里给出了二次曲面Q，它在某仿射标架下的方程是：

$$a_{ij}x^ix^j+2a_{0i}x^i+a_{00}=0.$$

首项$a_{ij}x^ix^j=\varphi(\vec{x})$的全体定义为平移空间$V$的二次形。

由向量$\vec{l}$，$\vec{m}\in V$所确定的两个方向，叫作关于二次曲面Q是共轭的，如果

$$\varphi(\bar{l}, \bar{m})=0,$$

其中φ是二次形φ的极形式。把方向$\bar{l}$叫作二次曲面Q的渐近方向，如果$\varphi(\bar{l})=0$.证明：每条不属于渐近方向的直线与二次曲面Q相交于两点（相异二实的、重合或二虚的）。

1043．设方向$\bar{l}$不是二次曲面Q的渐近方向。证明：二次曲面Q在给定方向的诸直线上所截线段的中点属于一个完全确定的超平面（它叫作与方向$\bar{l}$共轭的**二次曲面Q的直径超平面**）。

1044．证明：二次曲面Q的每个直径超平面都含有该二次曲面中心的轨迹。

1045．证明：二次曲面Q的方程中所含有的二次形φ，具有标准形状，当且仅当标架坐标向量决定的方向，关于φ成两两共轭。

1046．设在空间A_4里，用标准方程给出了二次曲面。验证：

（1）椭圆面没有实的渐近方向；

（2）对于**指标l的双曲面**，过它的中心并具有渐近方向的诸直线，构成**指标l的锥面**。

1047．给出了二次曲面方程：

$$a_{ij}x^ix^j+2b_ix^i+c=0.$$

证明：

（1）二次曲面是抛物面，如果在某仿射坐标系下，它的方程具有以下形式：

$$\bar{a}_{pq}\bar{x}^p\bar{x}^q+2\bar{b}_n\bar{x}^n=0.$$

（2）二次曲面为抛物面的充要条件是：

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0,\quad \triangle=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix}\neq 0.$$

1048．证明：对有**中心的超二次曲面**，过它中心的任何超平面都是直径平面。

1049．过已知点A作已知二次曲面渐近方向的一切可能的直

线，写出由这些直线组成的渐近方向的锥面方程。

1050．二次曲面$a_{ij}x^ix^j-1=0$的诸弦$[AA_1]$，$[BB_1]$，$[CC_1]$平行于**非渐近方向**的向量$\vec{m}$．设点A_0，B_0，C_0分别是点A_1，B_1，C_1关于线段$[BC]$，$[CA]$，$[AB]$中点的对称点。证明：点A_0，B_0，C_0属于平行于**直径平面**的一个平面，而该直径平面关于已知二次曲面与方向$\vec{m}$是成共轭的。

1051．证明：椭圆面没有一切**实的直母线**。

1052．设Q是欧氏空间E_n中的二次曲面。称方向$\vec{l}$为二次曲面Q的**主方向**，如果正交于$\vec{l}$的任意方向$\vec{m}$同时也与$\vec{l}$共轭。称一个直径超平面为主直径超平面，如果它正交于方向$\vec{l}$同时也与$\vec{l}$共轭（此时，显然方向$\vec{l}$就是主方向）。

证明：二次曲面Q的主直径超平面是该二次曲面的对称平面。

1053．证明：在标准正交标架下，二次曲面$Q\subset E_n$的方程中，等式$a_{ij}=0$成立$(i\neq j)$，当且仅当把标架的坐标向量确定为关于Q的主方向。

1054．在标准正交标架下，已知二次曲面$Q\subset E_3$的方程：

$$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$$

求主方向。

1055．在标准正交标架下，已知二次曲面$Q\subset E_3$的方程：

$$x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0.$$

求各主直径平面。

1056．在空间E_3里，就标准正交标架将由下列方程给出的二次曲面方程化成标准形：

(1) $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$;

(2) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0$;

(3) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$.

第六章　凸多面体

§1　凸的图形、凸多面体

1057．给出**凸的图形**F和它的不在一条直线上的三个点A，B，C．证明：$\triangle ABC\subset F$．

1058．给出凸的图形F，以及它的不在一个平面上的四个点A，B，C，D．证明：图形F包含四面体$ABCD$．

1059．设Φ是空间E_n的单纯形，$A_\alpha(\alpha=0,1,\cdots,n)$是该单纯形的顶点，$O$是任意取的一点。证明：

$$\Phi=\{M\in E_n|\ \overrightarrow{OM}=\lambda^\alpha\overrightarrow{OA_\alpha}\}，$$

其中$\lambda^\alpha\geqslant 0$ 和$\sum\limits_\alpha\lambda^\alpha=1$．

（把所确定的诸数λ^α称作点$M\in\Phi$的**重心坐标**）。

1060．证明，单纯形Φ的点M之重心坐标（参看1059题）与点O的选取无关，而由给定的点M唯一确定。

1061．证明：如果单纯形Φ包含异于其顶点的点M．则它也必包含以点M为中点的某个线段。

1062．设F是欧氏空间E_n的某一图形，A是E_n中的一点。说点A就图形F占有一般位置，如果它满足两个条件：

(a)　$A\notin F$；

(b)　$[AX]\cap[AY]=A,\forall X,\ Y\in F,\ X\neq Y$．

此时将图形

$$A(F)=\bigcup_{X\in F}[AX]$$

叫作以A为顶点、F为底的锥面。证明：如果图形F是凸的，则锥面$A(F)$也是凸的图形。

1063．设Π_k是空间E_n的k维平面，Φ是空间Π_k的单纯形。证明：

（1）M是单纯形Φ的一般位置的点，当且仅当$M\notin\Pi_k$；

（2）锥面$M(\Phi)$是$(k+1)$维空间$\Pi_{k+1}=(M,\Pi_k)$的单纯形。

1064．证明：欧氏空间E_n的单纯形的直径等于该单纯形各棱长的最大值。

1065．在空间E_n中已知：超平面Π，某图形Φ'和点$O\notin\Phi'\cup\Pi$．用$C(O)$表示以点O为中心的线把（空间E_n中一切过点O的直线的全部点集）。设

$$L(\Phi',O)=\{M\in l\,|\,l\in C(O)\text{且}l\cap\Phi'\neq\varnothing\}.$$

将图形$L(\Phi',O)\cap\Pi=\Phi$叫作图形Φ'在平面Π上（从射影中心O）的中心射影。证明：如果图形Φ'是凸的，则图形Φ也是凸的。

1066．在空间E_n中已知：超平面Π，不平行它的直线$d=[M_0,\vec{a}]$和某图形Φ'．用$C(\vec{a})$表示含有直线d的平行线把（平行直线d的全部直线集合）。设

$$L(\Phi',d)=\{M\in l\,|\,l\in C(\vec{a})\text{且}l\cap\Phi'\neq\varnothing\}.$$

将图形$L(\Phi',d)\cap\Pi=\Phi$叫作图形Φ'按直线d的方向在平面Π上的平行射影。证明：如果图形Φ'是凸的，则图形Φ也是凸的。

1067．将连通图形——它的所有点都是内点，称作区域。将E_n中的闭有界区域叫作体（n维的）。

设F_0是欧氏空间E_{n-1}的某一图形。我们将认为E_{n-1}是欧氏空间E_n的超平面，并用$\vec{e}$表示不属于该超平面的单位向量，$I=[0,\kappa]$是数区间。将图形

$$F=\{M\in E_n|\ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OX}+t\vec{e},\ X\in F_0,\ t\in I\},$$

叫作以为F_0底的柱面。其中O是在空间E_n中任意选取的点。证明：

（1）柱面F是体，如果它的底F_0是E_{n-1}的体；

（2）如果底F_0是凸的图形，则柱面F也是凸的图形。

1068．将柱面$F\subset E_n$称作棱柱，如果它的底F_0是$n-1$维的多面体。证明：E_n中的棱柱是n维多面体。

1069．将锥面$A(F)\subset E_n$称作是锥体，如果它的底F是$n-1$维的多面体。证明：锥体是n维的多面体。

1070．证明：锥面$A(F)\subset E_n$是n维的多面体，如果它的底是$n-1$维的体。

1071．设各点$A_i(i=1,2,\cdots,n)$都在空间E_3的平面Π上，F是以A_i为顶点的凸多边形；$B_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,m)$在$E_3$的平面$\Pi'$上，而$F'$是以$B_\alpha$为顶点的凸多边形，并且$\Pi\parallel\Pi'$，$\Pi\neq\Pi'$．证明：存在以$A_i$，$B_\alpha$为顶点的凸多面体（以$F$和$F'$为底的凸旁面三角棱台）。

1072．证明：在凸多面体侧面上的、由它的棱所构成的全部面角的值之和等于$360°\cdot(\alpha_1-\alpha_2)$，其中$\alpha_1$是棱数、$\alpha_2$是多面体的侧面数。

1073．给出了以A_α（$\alpha=1,2,3,4$）为顶点的平行四边形和它所在平面的外部给出了两点B_1，B_2，使$(B_1B_2)\parallel(A_1A_2)$．证明存在以$A_\alpha$，$B_1$，$B_2$为顶点的**凸多面体（楔形）**。

§2　正多面体、半正多面体

1074．已知以$A_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$为顶点的正四面体。设点B_α是该四面体的中心关于它的侧面所在平面的对称点。证明存在以A_α，B_α为顶点的凸多面体。

1075．给出了以$A_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,8)$为顶点的立方体。设点$B_i$（$i=1,2,\cdots,6$）是该立方体的中心关于它的侧面所在平面的对称点。证明存在以A_α，B_i为顶点的凸多面体（**菱形十二面体**）。

1076．过立方体F的每条棱作一面，使该平面与立方体含此棱的侧面所在平面夹45°角。证明：在各平面所限定的并含有此立方体的半空间里，这些平面交成菱形十二面体。

1077．已知正多面体F．分别用S，V，r，R和φ表示多面体F的侧面面积、体积、内切球面的半径、外接球面的半径和二面角的值。知道正四面体的棱长为a，计算S，V，r，R和φ．

1078．已知正八面体的棱长为a，计算S，V，r，R和φ（参看1077题）。

1079．已知正十二面体的棱长为a，计算S，V，r，R和φ（参看1077题）。

1080．已知正二十面体的棱长为a，计算S，V，r，R和φ（参看1077题）。

1081．如果F是空间E_3的凸多面体，那末每一割平面Π（$\dim F\cap\Pi=2$）决定把多面体F分割成两个凸多面体P和Q，其中每一个都位于平面Π所限定的两个半空间之一。对于每个多面体P，Q我们说它是由多面体F切去一部分所得到的。证明：从正二十面体切去若干部分就可以得到正十二面体。

1082．证明：能由正十二面体切去若干部分得到立方体。

1083．证明：能由立方体切去若干部分得到正八面体。

1084．证明：能由立方体切去若干部分得到正四面体。

1085．将这样的凸多面体叫作半正的（或阿基米德的（Archimedes））多面体，它的各个多面角都合同、而各侧面是不同形状的正多边形。证明：阿基米德多面体的侧面可由不多于三种不同形状的正多边形组成。

1086．证明：阿基米德多面体的每个多面角不多于五个侧面。

1087．设割平面Π的一个确定分割将凸多面体F分割成两个多面体P和Q（参看1081题）。

如果多面体Q只含多面体F的一个顶点M_0，则说多面体P是由多面体F切去顶点M_0而得到的。如果多面体Q只含多面体F的一条棱$[AB]$，则说多面体P是由多面体F切去棱$[AB]$而得到的。证明：切去正四面体的若干个顶点能得到半正八面体。

1088．证明：能由立方体切去若干个顶点得到半正十四面体。

1089．证明：能由正八面体切去若干个顶点得到与1088题中的多面体相异的半正十四面体（有三面角）。

1090．证明：能由正十二面体切去若干个顶点得到半正三十二面体。

1091．证明：能由正二十面体切去若干个顶点得到与1090题多面体相异的半正三十二面体。

1092．证明：能从正八面体切去若干个顶点与棱得到半正二十六面体（在顶点处有三面角）。

1093．证明：能从正八面体或立方体切去若干个顶点得到顶点处具有四面角的半正十四面体（所谓**立方八面体**）。

1094．证明：能从正十二面体或正二十面体切去若干个顶点得到顶点处具有四面角的半正三十二面体（**十二面体上的二十面体**）。

第 三 篇

射影空间　映象法

第一章　射影空间

§1　射影空间、射影坐标

1095．设F_2^2是模2的剩余域F_2上的二维向量空间。证明：射影直线$P(F_2^2)$上恰有三个点。

1096．证明：射影平面$P(V)$上至少含有七个点。

1097．设F_2^3是模 2 的剩余域F_2上的三维向量空间。证明：射影平面$P(F_2^3)$恰含有七个点。

1098．射影平面$P(F_2^3)$含有多少条直线？

1099．证明：在射影平面$P(V)$上存在四个点，其中任何三个点都不在一条直线上。

1100．证明：在n维射影空间$P(V)$里存在 $n+2$ 个一般位置的点。

1101．设F_3^3是模3的剩余域F_3上的三维向量空间。射影平面$P(F_3^3)$的任意一条直线含有多少个点？

1102．设F_p^{n+1}是模p（p是素数）的剩余域F_p上的 $n+1$ 维向量空间。证明：n维射影空间$P(F_p^{n+1})$ 由$\dfrac{p^{n+1}-1}{p-1}$个点组成。

1103．n维射影空间$P(F_p^{n+1})$的任意一条直线含有多少个点？

1104．域K上的射影空间$P_3(K)$里点的最少个数是多少？

1105．在射影直线的模型$P_1(\mathbf{R})$（在线束$P(O)$内或在扩大直线$\bar{d}$上）上，给出了射影标架（A_0, A_1, E），根据在该标架下给出的下列各点的坐标作出它们：

$$M(1,-1),\quad N(-2,1),\quad L(-2,2).$$

1106．在扩大直线$\bar{d}$上给出了射影标架

$$R=(A_0, A_1, E_\infty).$$

根据两点在标架R下给出的坐标

$$M(-1,1)、N(1,-2)$$

作出此二点。

1107. 在扩大直线$\bar{d}$上给出射影标架

$$R=(A_0,A_1,E).$$

A_0、A_1是扩大直线$\bar{d}$的本义点，E是线段$[A_0A_1]$ 的中点．就标架R写出非本义点$X_\infty\in\bar{d}$的坐标。

1108. 在扩大直线$\bar{d}$上给出两点A_0, A_1. 作出射影标架

$$R=(A_0,E_1,E)$$

的单位点E. 如果已知直线$\bar{d}$的非本义点M_∞在标架R下的坐标是$M_\infty(-1,2)$.

1109. 在扩大直线$\bar{d}$上给出射影标架

$$\tilde{R}=(A_0,X_\infty,E).$$

就标架$\tilde{R}$所给出的坐标作出点$M(2,1)$.

1110. 在扩大直线$\bar{d}$上给出本义点A_0、A_1、E. 在标架

$$R(A_0,A_1,E)$$

下，本义点$M\in\bar{d}$ $(M\neq A_0, M\neq A_1)$具有坐标(x^0,x^1). 证明：

$$\frac{x^0}{x^1}=\frac{(A_0A_1,E)}{(A_0A_1,M)}.$$

1111. 众所周知，在扩大直线$\bar{d}$上，要就点$M(x^0,x^1)$在射影标架

$$(A_0,A_1,E)$$

下的坐标来作出它，还需要在直线$\bar{d}$所在的扩大平面上取一仿射标架：

$$R=(O,\vec{a}_0,\vec{a}_1),$$

使$O\notin\bar{d}$，而使基底$(\vec{a}_0,\vec{a}_1)$生成标架(A_0,A_1,E). 于是所求的点

$$M=(OM')\cap\bar{d},$$

其中直线(OM')以

$$\overrightarrow{OM'}=x^0\vec{a}_0+x^1\vec{a}_1$$

为方向向量。证明：点M在直线$\bar{d}$的位置与点O的选取无关。

1112．在扩大直线$\bar{d}$上给出点M，N、L及射影标架

$$R=(A_0,A_1,E).$$

就标架R来判定点M，N，L及非本义点$X\in\bar{d}$（图 1）本身的坐标是同号还是异号。再就标架

$$R'=(A_0,A_1,E')$$

来解本题。

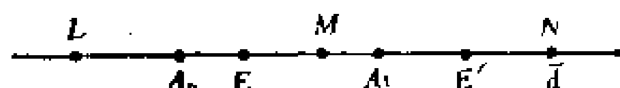


图1

1113．在扩大平面$\bar{\Sigma}$上给出了射影标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E).$$

其中，坐标三角形的顶点$A_\alpha(\alpha=0,1,2)$及单位点E都是本义点。就标架R下的坐标，作出下列各点：

$$M(1,2,0),N(0,-2,-1),P(1,2,1),Q(0,-4,0).$$

1114．在扩大平面$\bar{\Sigma}$上，给出具有本义顶点$A_\alpha(\alpha=0,1,2)$及非本义单位点E_∞的射影标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E_\infty)$$

就标架R下的坐标作出点$M(1,1,2)$.

1115．设点E是平面Σ上的三角形$A_0A_1A_2$的重心。在扩大平面$\bar{\Sigma}$上，就射影标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E)$$

下的坐标作出点$M(1,1,-1)$.

1116．在扩大平面$\bar{\Sigma}$上给出射影标架

$$\tilde{R}=(A_0,X_\infty,Y_\infty,E).$$

就标架$\tilde{R}$下的坐标作出下列两点

$$M(2,4,-1),\ N(0,1,2).$$

1117．在射影平面上给出标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E).$$

E_α是点E由中心A_α在直线$(A_\beta A_\gamma)$上的射影（$\alpha,\beta,\gamma=0,1,2$——

互不相同）。就标架R求点A_α、E，E_α的坐标，再写出直线

$$(A_\alpha A_\beta),\quad (A_\alpha E_\alpha)$$

的方程。

1118．在射影平面上，就标架

$$R(A_0, A_1, A_2, E)$$

由坐标给出该平面上的一条直线$a(a_0, a_1, a_2)$．证明：直线a通过顶点A_α，当且仅当

$$a_\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2).$$

1119．在射影平面上，给出标架

$$R = (A_0, A_1, A_2, E).$$

在此标架下，如果两点$A(a^0, a^1, a^2)$，$B(b^0, b^1, b^2)$的前一对坐标成比例，试问直线(AB)关于标架R的位置有何特点？

1120．在射影平面上，给出了标架

$$R = (A_0, A_1, A_2, E).$$

在此标架下，如果在该平面上所给出的两条直线

$$a(a_0, a_1, a_2),\quad b(b_0, b_1, b_2)$$

的前一对坐标成比例，试问它们交点M关于标架R的位置有何特点？

1121．在射影标架

$$R = (A_0, A_1, A_2, E)$$

下，给出了三点

$$A(a^0, a^1, a^2),\quad B(b^0, b^1, b^2),\quad C(c^0, c^1, c^2).$$

证明：如果它们位于一条直线上，当且仅当该组点坐标的行列式

$$(A, B, C) = \begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^0 & b^1 & b^2 \\ c^0 & c^1 & c^2 \end{vmatrix},$$

等于零。

1122．就射影标架R，由坐标给出三条直线

$$a(a_0, a_1, a_2),\quad b(b_0, b_1, b_2),\quad c(c_0, c_1, c_2).$$

证明：这三条直线有公共点，当且仅当该组直线的坐标的行列式

$$(a,b,c)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

等于零。

1123．设在射影平面上，就标架R由方程给出两条不同的直线：

a：$a_\alpha x^\alpha=0$，

b：$b_\alpha x^\alpha=0$ $(\alpha=0,1,2)$．

证明方程：

$$\lambda a_\alpha x^\alpha+\mu b_\alpha x^\alpha=0$$

在射影平面上确定一线束。其中λ，μ取不同时等于零的一切实数值。

1124．在扩大平面上，就射影标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E)$$

用坐标给出一条直线

$$a(1,2,-2)．$$

根据它的坐标作出直线a．

1125．在扩大平面上，就射影标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E)$$

用坐标给出一条直线

$$e(1,1,1)．$$

如果该标架的单位点E是坐标三角形$A_0A_1A_2$中线的交点，那么具有上述坐标的直线e关于标架R有什么特点？

1126．在射影平面上，就标架

$$R(A_0,A_1,A_2,E)$$

给出点A，B，C，D的坐标：

$$A(1,0,-1),\ B(2,1,0),\ C(0,0,1),\ D(1,1,2)．$$

验证这些点是一般位置的四点，再求生成标架

$$R'=(A,B,C,D)$$

的向量基底。

1127. 在从标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E)$$

变到标架

$$R'=(A'_0,A'_1,A'_2,E')$$

时，写出射影坐标的变换公式，如果就标架R由坐标给出下列各点

$$A'_0(1,0,-1),\quad A'_1(2,1,0),\quad A'_2(0,0,1)$$

以及（1）$E'(3,1,0)$，（2）$E'(1,1,2)$.

1128. 在扩大平面上，射影标架R'的坐标三角形的顶点和单位点具有如下仿射坐标：

$$A'_0(0,3),\quad A'_1(4,0),\quad A'_2(4,3),\quad E'(3,2).$$

求：

（1）点M的射影坐标，如果它的仿射坐标是$M(1,1)$；

（2）点N的仿射坐标，如果它的射影坐标是$N(4,3,-6)$；

（3）横轴的非本义点的射影坐标；

（4）点P的齐次仿射坐标，如果它的射影坐标是$P(5,5,-7)$.

1129. 在扩大平面上，射影标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E)$$

的单位点E是坐标三角形$A_0A_1A_2$中线的交点。就标架R，求坐标三角形的各边及中线的非本义点的坐标。

§2 笛沙格定理

1130. 应用对偶原理证明：

（1）在射影平面$P_2(K)$上

（a）过每一点不少于三条直线；

（b）存在三条直线不经过一点；

（2）在三维射影空间$P_3(K)$里

（a）过每条直线不少于三个平面；

（b）存在经过一点、但不经过一条直线的三个平面；

(c) 存在不经过一点的四个平面；

(d) 过任何两条相交直线有唯一的平面；

(e) 过一直线和不属于它的一点有唯一的平面。

1131．根据空间对偶原理，叙述笛沙格定理的对偶定理。

1132．在图形限定的范围内给出点A和直线对p与q，它们在图形范围之外交于点B（不可及点）。利用笛沙格定理作出直线(AB)的可及部分。

1133．在图形限定的范围内给出两对直线对：相交于不可及点A的p，q和相交于不可及点B的u，v．作出直线(AB)的可及部分。

1134．设给定了一点A及两条平行直线p和q $(p\neq q)$．只用一把直尺过点A作平行于p和q的直线。

1135．在图形限定的范围内给出两对直线对：p与q和u与v，p与q相交于不可及点A．u与v相交于不可及点B．直线(AB)是不可及的。作出过直线(AB)与直线t交点的某直线的一部分．其中直线t由其可及部分所给定(简言之，求可及直线与不可及直线间的交点)。

1136．已知一平行四边形、直线m和点A．仅用一把直尺过点A作平行于直线m的直线。

1137．梯形$ABCD$与平行于底$[AB]$的两条直线p和q相交于点：$p\cap(AD)=M$，$p\cap(AC)=P$，$q\cap(BD)=N$，$q\cap(BC)=Q$．证明点$(MN)\cap(PQ)$位于直线(AB)上。

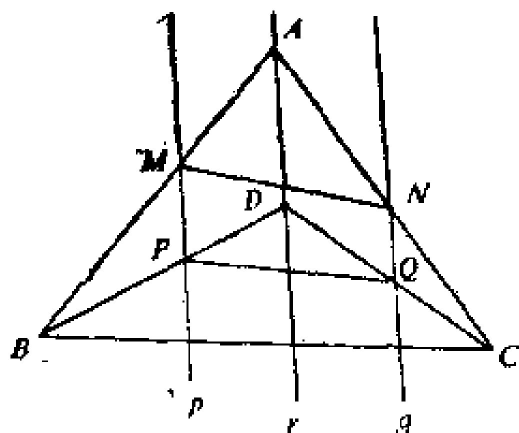


图 2

1138．两个三角形ABC和DBC与三条平行直线$p,q,r=(AD)$相交。又 $p\cap(AB)=M$，$p\cap(DB)=P$，$q\cap(AC)=N$，$q\cap(DC)=Q$(图2)。证明：三条直线

(MN)，(PQ)，(BC) 属于同一线束。

1139．证明：如果连接三角形ABC和$A'B'C'$顶点的直线

$$(AA'),\ (BB'),\ (CC')$$

彼此平行，并且交点

$$(AB)\cap(A'B'),\ (BC)\cap(B'C'),\ (AC)\cap(A'C')$$

都存在，则这些点属于一条直线。如果 $(AB)\parallel(A'B')$，$(BC)\cap(B'C')=M$，$(AC)\cap(A'C')=N$，则$(MN)\parallel(AB)$．而倘若$(AB)\parallel(A'B')$，$(BC)\parallel(B'C')$，则有$(AC)\parallel(A'C')$．

1140．在仿射（或欧氏）平面上，给出三角形ABC及点E，且点E不位于三角形各边所在直线上。将顶点A，B，C从点E分别向直线(BC)，(AC)，(AB)作射影，得到点A_1，B_1，C_1．把这些点再从同一点E分别向直线(B_1C_1)，(A_1C_1)，(A_1B_1)作射影，得到点A_2，B_2，C_2．继续对三角形$A_2B_2C_2$重复这些作法。

假定各点 $(AB)\cap(A_1B_1)=M$，$(BC)\cap(B_1C_1)=N$，$(CA)\cap(C_1A_1)=P$都存在，证明：

（1）M，N，P三点属于一条直线；

（2）所讨论的全部三角形、含有同名各边的直线都过同一点。

§3 射影映射和射影变换

1141．直线d到直线d'的射影映射

$$f: d\longrightarrow d',$$

是由两相对应的标架：

$$(A,B,C)\subset d \text{和} (A',B',C')\subset d'$$

所给定的。就映射f，作出点$D=d\cap d'$的象和原象。

1142．在扩大平面上给出两条直线d和d'．由两标架

$$(A,B,C)\subset d \text{和} (A',B',C')\subset d'$$

决定了射影映射

$$f: d\longrightarrow d'$$

作出非本义点$M_\infty \in \bar{d}$的象

1143．线束$P(O)$到线束$P(O')$的射影映射

$$f: P(O) \longrightarrow P(O').$$

是由两组对应的标架：

$$(a,b,c) \subset P(O) \text{ 和 } (a',b',c') \subset P(O')$$

所给定的。就映射f作出直线(OO')的象和原象。

1144．在直线d上给出一射影标架

$$R = (A_0, A_1, E).$$

以及就标架R又给定带有坐标的三个点

$$M_a(x_a^\alpha)\ (a=0,1,2;\ \ \alpha=0,1).$$

同样，在直线d'上也给出了一标架

$$R' = (A'_0, A'_1, E').$$

并就标架R'给定带有坐标的三个点

$$M'_a(y_a^\alpha)\ (a=0,1,2\ \ \ \alpha=0,1)$$

已知射影映射

$$f: d \longrightarrow d',\ \ M'_a = f(M_a).$$

就标架R'求点$M' = f(M)$的坐标，如果它的原象$M \in d$，且就标架R具有坐标$M(u^\alpha)$.

1145．由两标架

$$R = (A,B,C) \text{ 和 } f(R) = (A',B',C')$$

给出直线d的射影变换f，就变换f作出已知点$M \in d$的象和原象。

1146．证明，有公共不动点的、一条直线的两个双曲射影变换的合成是可换的。

1147．证明：如果直线d就射影变换f有三个不动点，则f是直线的恒等变换。

1148．证明，如果就射影变换f，扩大直线$\bar{d}$的非本义点$X_\infty \in \bar{d}$是不动的，则压缩

$$f \mid d$$

是直线

$$d = \bar{d} \setminus \{X_\infty\}$$

的仿射变换。

1149．证明：如果线束$P(O)$到线束$P(O')$的射影映射

$$f: P(O) \longrightarrow P(O')$$

使三对对应直线的三个交点属于一条直线，则该两线束的任意一对对应(不同的)直线的交点也属于同一条直线。即映射是透视的。

1150．证明：如果线束$P(O)$到直线$d \notin P(O)$的射影映射

$$f: P(O) \longrightarrow d$$

使线束$P(O)$的三条直线经过它们在直线d上的对应点，则该线束的任意直线也经过它在直线d上的对应点。即映射f是透视的。

1151．设直线d到线束$P(O)$的射影映射

$$f: d \longrightarrow P(O)$$

是由两对应的标架

$$(A,\ B,\ C) \subset d \text{和} (a,\ b,\ c) \subset P(O)$$

所给出的。作出给定的直线$m \in P(O)$的原象。

再讨论当

$$O=A,\ \ m=d$$

时的特殊情况。

1152．线束$P(O)$的射影变换

$$f: P(O) \longrightarrow P(O)$$

由两标架

$$R=(a,\ b,\ c) \text{和} f(R)=(a',\ b',\ c')$$

所给定。就变换f作出已知直线$m \in P(O)$的象和原象。

1153．给出位于直线d上的三点A，B，C和位于直线d' ($d' \neq d$) 上的三点A'，B'，C'。

证明：各点

$K=(BC') \cap (B'C)$，$L=(AC') \cap (A'C)$，$M=(AB') \cap (A'B)$

位于一条直线上(巴卜(Pappus)定理)。

1154．证明：如果平面的射影变换f使四个一般位置的点不

动，则f是平面$\overline{\Pi}$的恒等变换。

1155．证明：如果扩大平面$\overline{\Pi}$的射影变换f，使非 义直线$d_\infty \subset \overline{\Pi}$是不动的，则压缩

$$f \mid \Pi$$

是平面

$$\Pi = \overline{\Pi} \setminus d_\infty$$

的仿射变换。

1156．平面的射影变换f，由三个不动点A，B，C和一个对应点对

$$D \text{ 和 } D' = f(D)$$

所给出（A，B，C，D是平面上一般位置的四个点）。就所给变换作出任意给定的点M的象。

1157．平面的射影变换f是由两个不动点A，B及两个对应点对：

$$C \text{ 和 } C' = f(C), \quad D \text{ 和 } D' = f(D)$$

所给定的（A，B，C，D是平面上一般位置的四个点）。对变换f作出任意给定的点M的象。

1158． 根据三个对应点对：

$$A \text{ 和 } f(A) = B,$$

$$B \text{ 和 } f(B) = C,$$

$$C \text{ 和 } f(C) = A,$$

写出直线射影变换f的公式，如果

(1) $A(2,1)$，$B(-2,3)$，$C(1,-1)$；

(2) $A(3,-1)$，$B(-1,1)$，$C(-2,3)$．

1159．根据两个不动点M和N及两个对应点对：

$$A \text{ 和 } A' = f(A), \quad B \text{ 和 } B' = f(B)$$

的坐标，写出平面射影变换f的公式，如果

$M'(0,1,0)$，$N'(1,0,0)$，$A(0,0,1)$，$A'(a,0,1)$，

$B(0,b,1)$，$B'(0,0,1)$．

第二章　射影几何的基本论据

§1　交比、调和四元组、完全四点形

1160．证明：在一直线上的有序的四个点中

(1) 交换中间的两个点或交换两端的两个点，这四个点的交比有相同的改变；

(2) 交换第一个点和第三个点或交换第二个点第四个点，这四个点的交比有相同的改变。

对直线上的四个点作循环交换时，该四个点的交比如何改变？

1161．证明：对射影直线上的五个不同的点A，B，M，U，V有如下等式成立：

$$(AB,MV)=(AB,MU)(AB,UV).$$

1162．设不同四点的交比

$$(AB,CD)=t,$$

求由点A，B，C，D各种可能排列得到的全部四点组的交比的值。

1163．在直线上给出三个点A，B，C．在该直线作一点D，使

$$(AB,CD)=2.$$

1164．已知三角形ABC，点M和过点M的的直线m．直线m与各直线

$$(BC),\ (CA),\ (AB)$$

依次交于点

$$A_1,\ B_1,\ C_1.$$

证明交比相等：

$$(MA_1,\ B_1C_1)=(m,(MA);(MB),(MC)).$$

1165．A，B，C，D是一仿射直线的四个点，点C位于A和B

两点之间。证明：

$$(AB,CD)<0 \Longleftrightarrow (D\text{不在}A\text{和}B\text{两点之间})。$$

（两点对A，B和C，D彼此分离。）

1166．根据下列四点在平面上的射影坐标：

$$A(1,0,1)，B(1,1,3)，C(2,1,4)，D(0,1,2)$$

计算它们的交比。

1167．证明：点D是一条直线的有序的三点A，B，C的第四调和点，当且仅当点D关于标架

$$(A，B，C)$$

的坐标$(u^0，u^1)$满足条件：

$$u^0=-u^1.$$

1168．证明：直线$a(1,1,1)$与射影标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E)$$

的坐标三角形$A_0A_1A_2$的各边相交于点M_γ，而点E_γ是点E从坐标三角形的各顶点A_α向边（$A_\beta A_\gamma$）的射影*。且有

$$(A_\alpha A_\beta,E_\gamma M_\gamma)=-1$$

（α，β，$\gamma=0$，1，2；各不相同）。

作出直线a。

1169．证明：线段$[AB]$的中点C和扩大直线(AB)的非本义点D_∞调和分离线段$[AB]$的二端点。

1170．在扩大直线(AB)上，在标架

$$R=(A，B，D_\infty)$$

下，线段$[AB]$之中点C的射影坐标是什么？

1171．证明：含有三角形ABC中线$[CM]$的直线（CM）及平行于边$[AB]$的直线(CX)，调和分离三角形ABC其余二边所在直线(CA)和(CB)．

1172．直线a和b交于点C，直线c和d分别含有直线a和b二交角的两个平分角线。证明：

---

* 为使题意明确，添加此句——译者注．

$$(ab,cd)=-1.$$

1173。证明：三角形ABC之角C的内、外角平分角线所在的两条直线，与直线(AB)的两个交点调和分离两个顶点A和B.

1174．在射影平面上给出标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E).$$

点E_α是点E从坐标三角形$A_0A_1A_2$的各顶点A_α向边$(A_\beta A_\gamma)$的射影（$\alpha,\beta,\gamma=0,1,2$；各不相同）。证明，三个点

$$M_\gamma=(E_\alpha E_\beta)\cap(A_\alpha A_\beta)$$

位于一条直线d上、并且每个点都是点组

$$(A_\alpha,A_\beta,E_\gamma)$$

的第四调和点。求直线d关于标架R的坐标。

1175．证明：平行四边形两条对角线所在的两条直线，调和分离过平行四边形的中心并平行于它的两邻边的两条直线。

1176．在仿射（或欧氏）平面Π上给出线段$[AB]$及它的中点C．仅用一直尺，过已知点

$$M\notin(AB)$$

作平行于直线(AB)的直线。

1177．给出两条平行直线（不同的）。仅用一直尺作

（1）在其中一条直线上给出的一线段的中点；

（2）过已知点且平行两条给定直线的直线。

1178．证明：梯形两条对角线的交点、二腰延长线的交点及二底之二中点位于一条直线上。

§2　直线和平面的射影变换

1179 证明：具有公共不动点的、直线上两个抛物射影变换的合成或是恒等变换、或是具有同一不动点的抛物型变换。

1180．设直线d上的对合f，由下列各点

$$A,\ A'=f(A),\ B=f(B)\ (A\neq A')$$

所给定。作出已知点$M\in d$的象。

1181．设A和B是射影直线P_1的两个不同点。变换

$$f: P_1 \longrightarrow P$$

由条件：

$$f(A)=A, \quad f(B)=B$$

所决定。

而且如果$M \neq A$，$M \neq B$，则有

$$f(M)=M'; \ (AB, MM')=-1.$$

证明：f是双曲对合。

1182．在一条直线上给出两个点A和B．对直线上异于点A和B的每一点X，作出点Y，使点对A，X调和分离点对B，Y．证明：按照则规：

$$f(X)=Y, \quad f(A)=A, \quad f(B)=B$$

将已知直线映成自身的映射f是射影的。

1183．我们来讨论欧氏平面的线束$P(O)$——射影直线P_1的模型。用条件：

$$f(m) \perp m, \quad \forall m \in P(O)$$

来定义线束$P(O)$的变换f．证明：f是直线P_1模型上的椭圆对合。

1184．阐明对合的类型：

$$\lambda y^0 = x^0 - 2x^1,$$

$$\lambda y^1 = 3x^0 - x^1.$$

1185．计算下列对合的不动点坐标：

$$y^0 = x^0 + 2x^1,$$

$$y^1 = 4x^0 - x^1.$$

1186．证明：一直线的两不同的双曲对合之合成是可换的，当且仅当这两对合的两个不动点对彼此调和分离。

1187．作两个透视三角形，使它们的透视中心在透视轴上。

1188．计算下列平面射影变换的不动点坐标：

$$\lambda y^0 = x^0,$$

$$\lambda y^1 = x^1,$$

$$\lambda y^2 = x^1 + x^2.$$

1189．由中心S，轴s及点A和$A'=f(A)$给出了一透射f．作

（1）点$f(B)$，其中点B是直线(AA')上的已知点；

（2）点$f^{-1}(C)$，其中点C是已知点；

（3）点$f^2(D)$，其中点D是已知点。

1190．由中心S，轴s及点A和$A'=f(A)$给出透射f．作给定直线d的象和原象。

1191．由中心S，轴s及点A和$A'=f(A)$给出透射f．在已知直线p上求一点X．使它的象在已知直线$q(q\neq f(p))$上。

1192．在射影平面上两个标架

$$R(A,B,C,S)\text{和}R'=(A',B',C',S)$$

的坐标三角形

$$ABC\text{和}A'B'C'$$

具有透视中心S．证明：将标架R变成标架R'的平面射影变换f，是以S为中心、以三角形ABC和$A'B'C'$的透视轴为轴的透射。

1193．透射f是由以下条件所给出的：不在一条直线上的三个点A,B,C，及它们的象

$$A'=f(A),\quad B'=f(B),\quad C'=f(C);$$

并且各直线

$$(AA'),\quad (BB'),\quad (CC')$$

都过同一点S．在已知直线p上、求象在给定直线$q(q\neq f(p))$上的点X．

1194．在扩大平面上，由亲似三角形对（即在变换f下相对应的）给出亲似变换f，并且给出两条直线p和$q\neq f(p)$．在直线p上求点

$$X\mid f(X)\in q.$$

1195．在扩大平面上，给出了两个有公共亲似方向、但有不同轴的亲似变换f_1和f_2．求直线x．对$\forall X\in x$．使$f_1(X)=f_2(X)$．

1196．在射影平面上给出标架

$$R=(A_0,A_1,A_2,E),$$

点E_a是点E从坐标三角形$A_0A_1A_2$的顶点A_a向边$(A_\beta A_\gamma)$的射影（α

$\beta,\gamma=0,1,2$；各不相同）。证明点

$$M_\gamma=(E_\alpha E_\beta)\cap(A_\alpha A_\beta)$$

关于标架R和$R'=(E_0,E_1,E_2,E)$都有同样的坐标。

1197．在扩大平面上，由中心S，轴s及点A和$A'=f(A)$给出了透射f.所给出的一对点和直线s都是本义的。作出两条已知平行线p和q的原象。

1198．就给定的扩大平面的亲似变换，作出二已知平行直线的象。

1199．在扩大平面上，由中心S，轴s及点A和$A'=f(A)$给出了透射f.所给出的一对点和直线s都是本义的。作出非本义直线的象和原象。

1200．非奇异透射f称作**调和（或对合）透射**，如果

$$(SA_0,AA')=-1, \qquad (*)$$

其中S是透射中心，s是透射轴；而

$$A'=f(A);\ A,\ A'\notin s,\ A_0=(AA')\cap s.$$

证明：

（1）调和透射f可由轴s及一对对应点A，A'给出，其中两点都不在轴s上、并使条件（*）成立；

（2）如果就透射f，等式（*）关于点对A，$A'=f(A)$成立，则等式（*）对任意相异两点的点对M，$M'=f(M)$都成立；

（3）调和透射是平面的唯一的对合射影变换。

1201．对合透射的中心具有坐标（1，1，1），而透射轴的方程是

$$x^0+x^1+x^2=0.$$

写出变换公式。

1202．作已知正方形的象

（1）就给定的透射；

（2）在扩大的欧氏平面上，就所给出的亲似变换。

1203．在扩大的欧氏平面上，给出具有本义中心、本义轴的透射f和一圆，试问透射f，在什么条件下能使已知圆的象是椭

圆（双曲线、抛物线）？

1204．在扩大平面上，试给出一个具有本义中心及本义轴，且使已知椭圆的象是抛物线（双曲线、椭圆）的透射。

1205．在扩大平面上试给出一透射，使

（1）已知抛物线的象为双曲线；

（2）已知双曲线的象为抛物线。

1206．从点S和T各引多条直线，使它们的交点是四角形的顶点（图3）。证明：

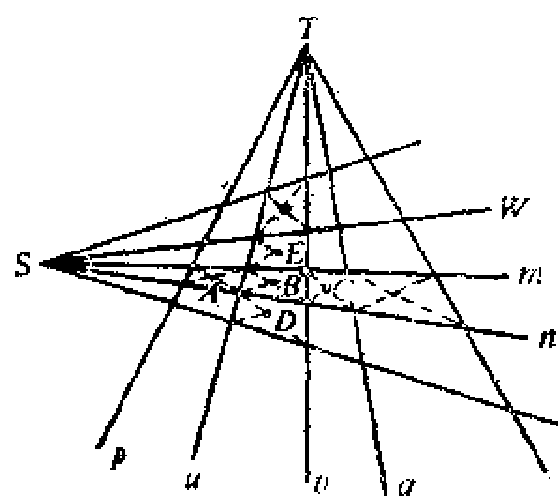


图 3

（1）过S的两条定直线与过T的任意两条直线所成四角形的对角线的交点$A,B,C\cdots$位于过点S的一条直线上；反之，位于这条直线上的点都是这样四角形的对角线之交点，四角形是以

$$m\cap p,\ n\cap p,$$
$$m\cap q,\ n\cap q$$

作为顶点，其中m，n是定直线；

（2）过T的两条定直线与过S的任意两条直线所成四角形的对角线之交点E，B，D，$\cdots$位于过点T的一条直线上；反之，在这条直线上的点都是这样四角形的对角线的交点，四角形是以

$$u\cap w,\ v\cap w,\ u\cap n,\ v\cap$$

为顶点，其中u，v是定直线*。

§3 射影平面上的二次曲线

1207．在扩大平面$\overline{\Pi}$上，就标架

* 为使题意明确，将原题改写——译者注。

$$R=(A_0,A_1,A_2,E),$$

由方程

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0\ \ (\alpha,\beta=0,1,2)$$

给出了一条二次曲线Q. 证明：二次曲线Q的本义点组成仿射平面Π的通常二次曲线。

1208. 证明定理：

如果$ABCD$是顶点都在二次卵形线（圆锥曲线）上的完全四点形，则它的每个对角点是相对对角线的极点。

1209. 已知二次卵形线（圆锥曲线）Q和点M. 作点M的极线，如果

（1）M是关于Q的外点；

（2）M是关于Q的内点；

（3）$M\in Q$.

1210. 对给定的二次卵形线（圆锥曲线）Q作已知直线d的极点。

1211. 用一直尺、从欧氏平面的已知点M向给定的圆Q作切线。

1212. 设直线d与圆Q无公共点。从点$A\in d$向圆Q引两条切线，连接两个切点的直线与直线d相交于点B. 证明：从点B再向圆Q引两条切线，连接两个切点的直线经过点A.

1213. 设直线d与圆Q无公共点。证明：从任意点$M\in d$向圆Q引二切线，连接二切点的直线都经过同一点。

1214. 设点A在关于以点O为心的圆Q的内部，$A\neq O$. 过点A作一切可能的弦。证明：圆Q在每一条弦两端点处的两条切线的交点，都在垂直于直线(AO)的一条直线上。

1215. 设点A在关于以点O为心的圆Q的外部。过点A向圆Q引异于直线(AO)的一切可能的割线。证明：圆Q与每条割线交点处的两条切线的交点，都在垂直于直线(AO)的一条直线上。

1216. 过不在圆Q上的一点A，引与圆Q相交于点M_i，N_i的诸直线d_i $(i,j=1,2,\cdots,n;\ n\geqslant2)$，即$d_i\cap Q=\{M_i,N_i\}$. 证明：

如果诸点

$$P_{ij}=(M_iN_j)\cap(M_jN_i),\ Q_{ij}=(M_iM_j)\cap(N_iN_j)\quad(i\neq j)$$

都存在，则它们全都在一条直线上。

1217．在圆Q内引诸平行弦、并在它们的端点处作圆Q的切线。证明：其中每条弦两端点处的两切线之交点都在一条直线上，该直线垂直于这些弦并过圆Q的心。

1218．过圆的内点C引三条弦：

$$[AA'],\ [BB'],\ [MN].$$

点C是弦$[MN]$的中点，弦$[MN]$与线段$[AB]$，$[A'B']$相交于点P，Q．证明点C也是线段$[PQ]$的中点。

1219．设两条二次卵形线（圆锥曲线）彼此相切于两点，证明：其中每一条都可经透射变成另一条。

1220．两条二次卵形线（圆锥曲线）相切于点A和B．其中一条曲线在点C处的切线与另一条曲线相交于点P和Q，而与直线(AB)交于点D．证明：点对P和Q调和分离点对C和D．

1221．在圆形场地A点处放置一足球。试问在什么方向把它射出、能使它经场地围墙两次反射后仍返回点A？

1222．由本身的五个点给定一条二次卵形线（圆锥曲线）。作：

（1）在其中一已知点处的切线；

（2）曲线的另一点；

（3）在所作点处的切线。

1223．由本身的四个点及其中一点处的切线给定了一条二次卵形线（圆锥曲线）。作：

（1）一已知点处的切线；

（2）曲线的另一点。

1224．由本身的三个点及其中两点处的两条切线给定了一条二次卵形线（圆锥曲线）。作：

（1）第三点处的切线；

（2）曲线的另一点。

1225. 由本身的五条切线给定一条二次卵形线（圆锥曲线）作：

（1）另一条切线；

（2）该曲线的一个点。

1226. 由本身的四条切线及其中的一个切点给定一条二次卵形线（圆锥曲线）。作：

（1）另一条切线；

（2）该曲线的另一点。

1227. 由本身的三条切线及其中的两个切点给定一条二次卵形线（圆锥曲线）。作：

（1）另一条切线；

（2）该曲线的另一个点。

1228. 二直线(AB)和(CD)是椭圆Q的共轭直径；A，B，C，$D\in Q$. 作：

（1）椭圆Q的另一点；

（2）在上面所作点处椭圆Q的切线。

1229. 证明：如果两条不同的二次曲线有三个公共点及其中一点处的公切线，则它们不能再有其它公共点。

1230. 证明定理：

如果三角形外切于一圆，则连接三角形各顶点与其对边之切点的诸直线，都经过同一点。

1231. 证明定理：

如果在扩大的欧氏平面上已知三角形内接于一圆，则含有三角形各边的直线与其相对顶点处之切线的各交点属于一条直线。

1232. 给出一平行四边形$ABCD$. 又知一椭圆内切于平行四边形$ABCD$的各边中点（没给出椭圆的图象）。从给定点$M\in(AB)$向该椭圆作一条切线。

1233. 给出一平行四边形$ABCD$. 过线段$[AB]$的中点作一条直线m. 又知一椭圆内切于平行四边形$ABCD$的各边中点（没给出椭圆的图象）。求直线m与该椭圆的交点。

1234．给出圆Q和它的圆心O．仅用直尺过给定点P作平行已知直线l的直线。

1235．给出圆Q和它的圆心O．仅用直尺，过给定点P作垂直已知直线l的直线。

1236．给出一条二次卵形线（圆锥曲线）的六个点。试问以给定点为顶点的六点形有多少条帕斯卡(Pascal)直线？

1237．给出一条二次卵形线（圆锥曲线）的六条切线。试问以给定切线为边的六边形有多少个布利安雄（Brianchon)点？

1238．给出对边两两平行的六角形。证明：过六角形对边中点的三条直线属于一个线束。

1239．在一条二次卵形线（圆锥曲线）内，有两个无公共顶点的内接三角形。证明：含有各边的六条直线都与一条二次曲线相切。

1240．证明：一条二次卵形线（圆锥曲线）无公共边的两个外切三角形的六个顶点，属于一条二次曲线。

1241．给出两个五点组：

A，B，C，L，M和A，B，C，N，P，它们所确定的两条二次卵形线（圆锥曲线），在公共点处并没有公切线。作这两条曲线的第四个公共点。

§4　仿射平面和欧氏平面的射影法

1242．在扩大平面上，应如何解释双曲线的渐近线？

1243．给出双曲线的两条渐近线及它的一点。作：

（1）双曲线在给定点处的切线；

（2）双曲线的另一点。

1244．给出双曲线的两条渐近线和它的一条切线。作：

（1）双曲线的一点；

（2）双曲线的另一条切线。

1245．给出双曲线的三个点和具有渐近方向的两条直线。作

出双曲线的中心。

1246．给出双曲线的中心、它的一条渐近线、一点及双曲线在该点处的切线。作双曲线的第二条渐近线。

1247．证明：抛物线的任何两条切线都不平行。

1248．给出抛物线的四条切线。作：

（1）该抛物线的一个点；

（2）抛物线的另一条切线。

1249．给出抛物线的四条切线。作出它的一条直径。

1250．给出抛物线的三个点和它的一条直径。作出抛物线的另一点及抛物线在该点处的切线。

1251．证明：过仿射平面的四个点，能作不多于两条抛物线。

1252．在仿射平面的射影模型上给出了线段〔AB〕．在直线（AB）上作点C，D，…，使点B是线段〔AC〕的中点、点C是线段〔BD〕的中点等等。

1253．在欧氏平面的射影模型上，在直线（MN）上作单位线段〔KL〕，如果已知点$K\in$（MN）*．

1254．在欧氏平面的射影模型上，给出直线d和点A．过点A作直线$a\perp d$．

1255．在欧氏平面的射影模型上，给出两条平行直线。作两端点在已知的两直线上、并且满足以下两条件的各线段：

（1）其中每个线段都垂直于已知两直线。

（2）每两个线段间的距离都一样。

1256．在欧氏平面的射影模型上，作已知角的平分角线。

1257．在欧氏平面的射影模型上，作已知边为〔MN〕的正方形。

1258．在欧氏平面的射影模型上，在已知直线l上截取给定线段〔MN〕中l．

1259．给出轴对称的射影解释。

---

* 在欧氏平面的射影模型上，非本义直线d_0和单位圆Q假定都是给定的。

第三章　欧氏平面的几何作图

§1　相交法

1260．依已知半径作过已知点并且与已知直线相切的圆。

1261．已知两个圆。作一个这样的点，使由它向一个圆引的两条切线间的夹角等于 α，而向另一个圆引的两条切线间的夹角等于 β。

1262．依据一圆的三条已知切线作该圆。

1263．依据底边 a，顶角A及由顶点A引的高线h_a作三角形。

1264．依据周长$2p$，顶角A及由顶点A引的高线h_a作三角形。

1265．依据底边a，顶角A及内切圆的半径 r 作三角形。

1266．在三角形ABC内求一点，从该点看三角形的各边成等角（托里析利（Torricdli)点）。

1267．依据底边a，顶角A及底边与角A的内角平分线的交点D作三角形。

1268．依据底边 a，顶角A及向一侧边引的中线m_b作三角形。

1269．依据底边a，顶角 A 和两侧边的比$|b|:|c|=m:n$．其中m,n是已知线段的长，作三角形。

1270．依据底边 a 及向底边引的高线 h_a 和顶角平分线与底边的交点 D作三角形。

1271．已知二顶角B和C 及边$[BC]$的中线 m_a 作三角形。

1272．依据底边及底边与一角平分线和一高线的两交点作三角形。

1273．依据两边及两对角线的比作平行四边形。

1274．依据两条对角线及两边之比作平行四边形。

1275．过圆S内部一点P引一条和该圆的已知弦〔AB〕相交

并被平分的弦*。

1276. 作三角形，如果已知底边a，顶角A及$|b|^2-|c|^2=|m|^2$，其中m是给定的线段。

1277. 作三角形，已知底边a，向底边引的高线h_a及$|b|^2-|c|^2=|m|^2$，其中m是给定的线段。

1278. 过给定点A作已知半径为r的圆，使由已知点B向该圆引的切线等于已知长l.

1279. 作一圆，使它平分已知圆(O,R)并且与已知直线在给定点处相切。

1280. 依据外接圆的半径R，顶角A以及$|b|^2+|c|^2=|l|^2$作三角形。其中l是已知线段。

1281. 已知一个圆及其一点。作已知长为l的弦，使一个定点到弦两端点距离的平方和（或差）等于一给定线段(PQ)之长的平方。

§2 变换法

1282. 依据两条对角线及二底作梯形。

1283. 依据交线、中线、上底和二对角线间的夹角作梯形。

1284. 已知三中线作三角形。

1285. 依据四条边作梯形。

1286. 已知两点A和B及直线(CD). 作一点$X\in(CD)$，使两角之差$\widehat{AXC}-\widehat{BXD}$为给定值。

1287. 依据底边a、顶角B及两侧边之差（或和）作三角形ABC.

1288. 已知一角及其内部一点P. 作一个周长最小的三角形，使它的一个顶点与点P重合，而另外两个顶点分别在已知角的两边上。

---

* 原题有误已改正——译者注。

1289．已知一角及其内部两点 A 和 B，作由三线段组成的折线，使折线长最小并使它的两个端点为 A 和 B，而两个间隔的顶点分别在已知角的两边上。

1290．已知两点 A 和 B 及直线 d．作一个角，使角顶在直线 d 上，而角的一边过点 A，另一边过点 B，并且使角平分线位于直线 d 上。

1291．已知两个同心圆和点 A．在已知两圆上分别求点 X，Y，使 $[XY]$ 和 $\angle XAY$ 为给定值。

1292．过两个已知圆的交点 A 引割线，使两弦 $[AB]$ 和 $[AC]$ 适合条件：

$$|AB|-|AC|=|a|,$$

其中 a 是已知线段。

1293．给出以点 O 为心的两个同心圆。引射线 $[OX)$，使射线被二已知圆所截得的线段，从已知点 A 看视角等于已知角 α.

1294．已知两个同心圆及一点。过已知点作和二已知圆相切的圆。

1295．在已知圆内作一内接正方形，使正方形的一边所在直线过已知点。

1296．依据二底角及高线与底边之和作三角形。

1297．作三角形 ABC 的内接正方形，使它的两个顶点在三角形的底边上，而另两个顶点在二侧边上。

1298．已知一角及在该角内部的一个圆。作和该角的两边及已知圆都相切的圆。

1299．已知两条直线及不在两条直线上的一个点 A．过点 A 作一条直线，使

$$\frac{|AM|}{|AN|}=\frac{|m|}{|n|},$$

其中 M 和 N 是所作直线和已知两条直线的交点，m 和 n 是两已知线段。

1300．依据顶角 A，内切圆半径 r 和两侧边的比

$$|b|:|c|=|m|:|n|$$

作三角形ABC，其中m和n是二已知线段。

1301. 依据两个角以及从第三个顶点所引的高线、中线及角平分线之和作三角形。

1302. 依据三边之比及一中线作三角形。

1303. 依据两个角及其对边之和作三角形。

1304. 依据三条高线作三角形。

1305. 在已知弓形里作下列内接图形：

(1) 正方形；

(2) 给定了两边之比的矩形。

1306. 作一圆与已知圆相切并与一已知角的两边相内切。

1307. 在已知扇形里作下列内接图形：

(1) 正方形；

(2) 给定了两边之比的矩形。

1308. 给出三条直线和一个点，三条直线属于同一线束而该点不属于三条直线。过已知点引一条与已知三条直线相交于三个点的直线，并使其中一个交点平分以另两个交点为端点的线段。

1309. 在已知三角形的内部画两个半径相等的圆，使它们彼此相切并使每一圆都和三角形的两边相切。

1310. 依据两边及两条对角线间的夹角作平行四边形。

1311. 在已知圆内作一内接三角形，使它的各边和一已知三角形的各边平行。

1312. 作过已知点并和已知两条直线相切的圆。

1313. 过两个已知点引两条和已知直线相交成两个点的平行线，并使二交点间的距离等于定长。

§3 代数法

1314. 过已知二点A和B作一圆，使它在已知直线a上截得的弦等于已知线段。

1315. 已知三角形的面积及它的周长，作和三角形内切圆合同的圆。

1316. 在三角形 ABC 的内部已知一点 D，过点 D 作一条将三角形分成两个等积图形的直线。

1317. 作长为

$$x=\sqrt[4]{abcd}$$

的线段，其中 a，b，c，d 是已知线段的长。

1318. 作长为

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2-\frac{c^2}{\sqrt{3}}}}$$

的线段，其中 a，b，c 是已知线段的长。

1319. 作长为

$$x=\frac{a^3\sqrt{ab}}{bc^2}$$

的线段，其中 a，b，c 是已知线段的长。

1320. 作长为

$$x=\frac{a^2b^3}{c^3d}$$

的线段，其中 a，b，c，d 是已知线段的长。

1321. 已知圆及其外部一点 A. 过点 A 引该圆的割线，使它的圆外部分是圆内部分的两倍。

1322. 以给定三角形的各顶点为心作三个两两相切的圆。

1323. 过已知点向给定圆引割线，使所截得的弦长为

$$\sqrt{\frac{a\sqrt{a^4-b^4}}{b}},$$

其中 a 和 b 是已知线段的长。

1324. 根据两边作平行四边形，如果它的两边和它的两对角线成比例。

1325. 过梯形一腰的中点引直线，使梯形被分成两个等积的

四边形。

1326．过两个定点作和已知直线相切的圆。

1327．根据已知的对角线作正五边形。

1328．过三角形边上的一点作直线，使它将三角形分成两个等积图形。

1329．使与矩形一边相平行的直线将此矩形分成两个彼此相似的矩形。

1330．过直角内部一点引一线直，使它与角两边二交点间的可能距离最小。

§4 杂 题

1331．已知两个同心圆，作一个正方形$ABCD$，使它的两个顶点A和B属于一个圆、而顶点C和D属于另一个圆。

1332．在已知一圆内作一内接直角三角形，使它的一直角边等于给定线段并且在过已知点的一条直线上。

1333．作一条给定方向的直线，使二已知圆在该直线上截得的线段等于定长。

1334．已知顶角B及两条中线m_a和m_c，作三角形ABC。

1335．根据两条对角线及二腰作梯形。

1336．根据已给定的边作已知圆的外切菱形。

1337．在已知圆扇形内作内切圆。

1338．作一圆与两条已知直线及定圆相切。

1339．过已知一点作圆，并使它和两个给定的圆的每一个都相交于对径点。

1340．根据四个点作一正方形，使该四点的每个点或属于它的边或属于边的延长线。

1341．在三角形ABC里引(DE)平行于(BC)，并使
$[AD]\cong[EC]$ $(D\in[AB], E\in[AC])$.

1342．已知一圆，并在该圆上给出了三个点B，M，H.

作该圆的内接三角形，使三个已知点分别是从所作三角形的一个顶点引的角平分线、中线及高线的所在直线与圆的交点。

1343．已知两个点A，B，并给定一个圆。分别以A，B为心作两个相等的圆，使两圆的公切线和已知圆也相切。

1344．已知一三角形的底边a，顶角A及与底边a相切的那个旁切圆的半径r_a，作三角形ABC．

1345．已知两个点A和B在圆(O,R)的直径上，且位于圆心O的两侧。在已知圆上，求作一点M，使射线$[MO)$是角AMB的平分角线。

1346．向已知圆引与已知直线成给定角的切线。

1347．以已知半径作一个与两个已知圆都相切的圆。

1348．在已知直线(MN)的异侧分别给出了点C和D，求作一点$X\in(MN)$，使(MN)含有角CXD的平分线。

1349．求作一个从两定点A和B看分别成两定角α和β的圆，并使它的圆心在已知直线d上。

1350．向已知圆引切线，使该切线与两个给定的同心圆相交而得的两弦之差为给定长。

1351．已知三点A，B，C．过点A作一个圆，使从B和C每点看此圆都成给定角。

1352．求作一个与三个已知圆都正交的圆。

1353．过两个已知点作一个和已知圆正交的圆。

1354．已知两个圆(O_1)和(O_2)及点A．作一个与已知三角形相似的三角形，并使它的一个顶点是点A，而其余二顶点分别在已知二圆上。

1355．已知角ABC及其内部一点M．求作一点$X\in[BC)$，使它到$[BA)$及到点M的距离相等。

第四章 映象法

§1 平行射影法

1356. 在平行射影下，作正三角、正三角棱锥、正六棱柱的映象。

1357. 用平行射影法作正方体、立方体、正八角棱锥的映象。

1358. 用平行射影法作正五边形的映象。

1359. 二底长之比为 2∶3 的等腰梯形，经平行射影后的映象可能是什么样的图形？

1360. 在平行射影下已知圆的映象。作出下列图形的映象：

（1）圆的内接正三角形；

（2）圆的外切正三角形。

1361. 在正射影下，作出圆柱的内接（圆柱的外切）正三棱柱的映象。

1362. 过已知点引给定椭圆的切线。

1363. 在平行射影下，已知圆的映象。求作圆内接正六边形的映象。

1364. 在平行射影下，给出圆的映象，求作下列图形的映象：

（1）该圆的内接正方形；

（2）该圆的内接正八边形。

1365. 在平行射影下，给出圆的映象，求作下列图形的映象：

（1）该圆的外切正方形；

（2）该圆的外切正八边形。

1366. 在平行射影下，作出圆锥的内接（圆锥的外切）正四角棱锥的映象。

1367．在正射影下，作出圆柱的内接直六面体的映象。

1368．给出椭圆的两条共轭直径 $[AB]$ 和 $[CD]$，作出椭圆 Q.*

1369．设有由两条共轭直径 $[AB]$ 和 $[CD]$ 所给定的椭圆 Q，是圆 Q' 在平行射影下的映象。作出圆 Q' 的内接正 n 边形（$n=3, 4, 5$）的映象。

1370．椭圆 Q 由它的两轴 $[AB]$ 和 $[CD]$ 所给定。作出该椭圆的任意一点及该椭圆在此点处的切线．

1371．由共轭直径对 $[AB]$ 和 $[CD]$ 给出一椭圆 Q．再作出椭圆 Q 的一对共轭直径，但不必作出椭圆 Q.

1372．给出平面的亲似变换。过已知点作一条属于该变换主方向的直线。

1373．由共轭直径对 $[AB]$ 和 $[CD]$ 给定椭圆 Q．作出椭圆 Q 的各轴，但不必作出椭圆 Q．

1374．在平行射影下，给出一正方形的映象。作出该正方形内切圆的映象。

1375．在平行射影下，给出一正方形的映象。作出该正方形外接圆的映象。

1376．在平行射影下，给出正方形 $A'B'C'D'$ 的映象。作出各边都与正方形 $A'B'C'D'$ 之外接圆相切的任意正方形的映象。

1377．在平行射影下，由 Q' 的相互垂直直径的映象 $[AB]$ 和 $[CD]$ 给定圆 Q' 的映象 Q．以及又给定不过 Q' 的圆心但与它相交于点 M' 和 N' 的直线 l' 的映象 l．作出点 M' 和 N' 的映象 M 和 N.

1378．在平行射影下，给出一正方形的映象。过映象所在平面的已知点，作该正方形内切圆的映象的切线。

1379．在平行射影下，给出一等腰直角三角形的映象。作出该三角形外接圆的映象.

---

* 在类似的习题里，用手作出椭圆的几个点，要求这些点能够保证画出合乎精度的椭圆。

1380. 在平行射影下，作出一圆锥内接圆柱的映象.在这里，圆柱的下底面属于圆锥的下底面、而圆柱的上底圆属于该圆锥的侧面。

1381. 作一球面的内接正三角棱锥的映象，如果它的底面经过（不经过）球心。*

1382. 作出一球面的内接正四角棱柱的映象。

1383. 作出一球面的外切圆柱的映象。

1384. 作出一球面的外切正三角棱柱的映象。

1385. 已知一球面及其赤道的映象。作出它的两条经线的映象，两条经线所在的两个平面是相互垂直的。

§2 轴测法

1386. 在平行射影下,作出正四面体的映象。

1387. 在平行射影下，作出侧棱和底边相等的正三棱柱的映象。

1388. 作出球面的内接立方体的映象。

1389. 作出球面的外切正四面体的映象。

1390. 在平行射影下，给出仿射标架的映象。平面 Π' 由它的三个点的轴测射影 M，N，P 及它们的二次射影 M_3，N_3，P_3 所给定 $(M_3 \overline{\in} N_3P_3)$.与 Π' 相交的直线 l'，由它的轴测射影 l 及二次射影 l_3 所给定。作点

$$X' = \Pi' \cap l'$$

的轴测射影及二次射影。

1391. 在射影平面上给出点

$$A', B', C' \ (A' \overline{\in} (B'C'))$$

的轴测射影，和它们在一坐标平面上的二次射影，而且还给出两条相交直线

$$l', \ m'$$

---

* 在与球面映象有关的习题里,假定是向过球心的平面,在正射影下的映象。

在映象平面上的轴测射影和它们在同一坐标平面上的二次射影。作出平面 $(A'B'C')$ 与二直线 l'，m' 所确定的平面之交线的映象。

1392．在平行射影下，给出标准正交标架

$$R'=(O',A_1',A_2',A_3')$$

的映象

$$(O,A_1,A_2,A_3).$$

平面 Π' 由它在标架 R' 的三坐标平面上的各条迹线所给定。作出由点 O' 向平面 Π' 所引之垂线的映象。

1393．在平行射影下，给出直平行六面体 $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ 的映象，其尺寸比为1:2:3，以及与平行六面体由顶点 C' 引出的三条棱相交于点 M'，N'，P' 的一个平面的映象。作出由点 A_1'向平面 $(M'N'P')$ 所引垂线的映象。

1394．设$R'=(O',A_1',A_2',A_3')$ 是标准正交标架，Σ 是映象平面，$O'\notin\Sigma$，$A_i=(OA_i)\cap\Sigma$ $(i=1,2,3)$，(OA_i) 是正射影下的三条不同的**轴测轴**。称三角形 $A_1A_2A_3$ 为**迹线三角形**。证明：

（1）各轴测轴的方向沿着迹线三角形的高线(由底向顶)；

（2）迹线三角形总是锐角三角形；任何锐角三角形都可取来作迹线三角形；

（3）轴测轴彼此组成钝角；如果迹线三角形还没确立，则从一点 O 引出的三条射线且两两构成钝角，就可取来作轴测轴；

（4）根据所给定的诸轴测轴就能求出各线段 e_x、e_y、e_z 的长（按各轴的**畸变系数**）；反之，如果已知畸变系数之比，则也能算出轴测轴之间的夹角。

1395．证明：

（1）在**正等轴测射影**中，畸变系数

$$e_x=e_y=e_z=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx0.82;$$

$$\widehat{xOy}=\widehat{xOz}=\widehat{yOz}=120^\circ;$$

(2)在正二轴测射影中有

$$e_y = e_z = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94;$$

$$e_x = \frac{1}{2} e_z = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47;$$

$$\widehat{yOz} \approx 97°11'; \quad \widehat{xOy} = \widehat{xOz} \approx 131°25'.$$

1396. 作立方体之内切球的映象。

1397. 证明：在正射影下，各轴测轴的方向沿着一个三角形的各角平分线，而该三角形各边与轴的畸变系数之平方成比例（魏斯巴赫(Weisbach)定理）。

1398. 应用魏斯巴赫定理，作出正交标架在正二轴测射影下的映象。

§3 位置问题和度量问题

1399. 在平行射影下，已知立方体的映象。设三点 M'，N'，P' 中的二点 M' 和 N' 分别在该立方体的二侧面上，而点 P' 在它的一条侧棱的延长线上。作这个立方体与过三点 M',N',P'之平面的截面的映象。

1400. 在平行射影下，已知正四棱锥的映象。作出该棱锥与一平面的截线之映象，此平面过三个点 M',N',P',其中点 M' 位于已知棱锥的一侧棱上，而点 N' 和P' 在它的二侧面上。

1401. 在平行射影下，给出圆柱面 F' 及平面 Π' 的映象。Π' 由在该圆柱各条母线上的三个点所给定。作出圆柱面 F' 与平面 Π' 的截线的映象。

1402. 在平行射影下，给出锥面 F' 和平面 Π'的映象，平面 Π' 是由在锥底面所在平面上的迹线及锥侧面上的一点所给定的。作出锥面 F' 和平面 Π' 之截线的映象。

1403. 在平行射影下，给出以 S' 为顶点和以 Q_1' 为底圆的锥

面 F' 的映象。截平面 Π' 由在锥侧面上的点 M' 及锥底面所在平面上的迹线 a' 所给定，迹线 a' 与底圆 Q_1' 相交于两个点。不作出截线，但根据它是由平面 Π' 与锥面 F'的侧面相交而得来确定该曲线的类型。

1404. 在平行射影下，给出以 S' 为顶点的圆锥面、截平面 Π' 以及直线 b' 的映象，其中截平面 Π' 是由在锥底面所在平面上的迹线 a' 和在锥侧面上的点 M' 所确定的，而 b' 是一条过锥底面的圆心 O_1' 和在锥面上的点 N' 的直线。作出点

$$X'=b'\cap\Pi'$$

的映象。

1405. 在平行射影下，给出四角棱柱及四个点的映象，该四点分别位于四棱柱的各条棱上。确定这四个点的原象是否在一个平面上。

1406. 给出球面及它的一条赤道的映象。作出直线 l' 与球面交点的映象，如果已知直线 l' 和点 $O_1'=l'\cap[N'S']$ 的映象，其中 N'、S' 是与已知赤道相对应的极点。

1407. 在平行射影下，给出五边形的映象。作出该五边形在某平面上的正射影的映象。

1408. 在平行射影下，给出直线 l' 和空间折线 $A'B'C'D'E'$ 的映象。作出折线各顶点在直线 l' 上的正射影的映象。

1409. 在平行射影下，已知椭圆 Q 是圆 Q' 的映象，而直线 l 是直线 l' 的映象。l' 位于圆 Q' 所在的平面上。作出一个这样的线段的映象，该线段在直线 l' 上并且和圆 Q' 的直径等长。

1410. 在平行射影下，给出圆和它所在平面上的一个角的映象。作出该角平分线的映象。

1411. 在平行射影下，给出圆内接三角形的映象，作出该三角形内切圆之圆心的映象。

1412. 在平行射影下，给出圆内接三角形的映象，作出其高线的映象。

1413. 在平行射影下，给出圆外切三角形的映象。作出它的

各中线、各高线和各角平分线的映象。

1414．在平行射影下，给出圆Q'的映象Q和线段$[A'B']$的映象$[AB]$并且线段$[A'B']$在圆Q'所在的平面上。作出正三角形$A'B'C'$的映象。

1415．在平行射影下，给出圆内接三角形$A'B'C'$的映象。求作一个与三角形$A'B'C'$相似的三角形（或者：根据映象返回到原象的形状）。

1416．在平行射影下，根据所给出的三角形$A'B'C'$的映象、以及它的外接圆之圆心P'的映象，推求原三角形$A'B'C'$的形状，如果点P'不是三角形$A'B'C'$各边的中点。

1417．在平行射影下，根据所给出的三角形$A'B'C'$的映象、以及它的内切圆之圆心O'的映象，推求原三角形$A'B'C'$的形状。

1418．在平行射影下，给出矩形的映象。根据所给出正方形一边的映象，作出位于矩形所在平面上的一正方形的映象。

1419．在平行射影下，给出三角形$A'B'C'$及其内切圆的映象。如果已知三角形$A'B'C'$一边的长，求该圆的半径。

1420．在平行射影下，给出三角形$A'B'C'$（已知其形状，比如是正的）的映象。作出它的外接圆的映象。

1421．在平行射影下，给出已知其形状的三角形的映象。作出它的内切圆的各切点的映象。

1422．在平行射影下，给出正方形的映象。作出在这个正方形所在平面上的另一个正方形的映象，根据所给出的它的一边$[A'B']$的映象$[AB]$来作。

1423．在平行射影下，给出在同一平面上的正方形和一个角的映象。求该角的实际值并作出它的平分线的映象。

1424．正三棱柱$A'B'C'A'_1B'_1C'_1$的侧棱等于其底边。从顶点A'_1向平面$(A'B'_1C'_1)$作垂线。在平行射影下，作出该垂线的映象。

1425．在平行射影下，给出立方体$A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$的映象。作出立方体$A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$与一平面的截面和一个点X'

的映象，其中该平面过顶点 A'_1 且垂直于立方体的对角线[$A'C'_1$]，而点 X' 是该平面与对角线[$A'C'_1$]的交点。

1426．在平行射影下，给出立方体 $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ 的映象。作出相错直线（$A'C'_1$）和（$B'D'$）的公垂线的映象，该两直线是立方体的对角线及它侧面的对角线所在直线，如果 a 是立方体的棱长，计算这二直线间的距离。

1427．过立方体的中心，作与它的一条对角线相垂直的平面。在平行射影下，作出立方体与该平面之截面的映象。如果 a 是立方体的棱长，计算截面的面积。

1428．过立方体 $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ 上底的棱[$A'D'$]作与下底交成线段[$M'_1N'_1$]的平面。从上底的一点 P' 向截线所在平面引垂线。在平行射影下，作出垂线的映象。

1429．在平行射影下，给出正四棱锥的映象，该四棱锥的高线等于底边。作出棱锥与平面截线的映象，该平面过底的一边并垂直于它相对侧面所在之平面。

1430．设正四棱柱 $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ 的高线等于底边长的 $\frac{3}{2}$。过底面的顶点 C'_1 作与棱柱对角线[A'_1C']相垂直的平面。在平行射影下，作出该平面与棱柱截线的映象。

1431．在平行射影下，给出立方体 $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ 和点 M' 与 N' 的映象，点 M'，N' 是直线（$M'N'$）与立方体的两侧面的交点。作出二直线（$M'N'$）和（$D'D'_1$）的公垂线之映象。

1432．在平行射影下，作出立方体的映象。该立方体内接于正四棱锥，而棱锥的侧棱等于其底面的对角线，而且这个立方体的下底在棱锥的下底面上、而其上底的各顶点位于棱锥的各侧棱上。

1433．在平行射影下，作出圆锥内接立方体的映象，而圆锥的母线等于其底的直径，并且这个立方体的下底面在锥的下底面上，而立方体的上底各顶点在锥的侧面上。

1434．作出球面的外切正四棱锥的映象。

1435. 作出球面的外切圆锥的映象。

1436. 作出球面的外切立方体的映象。

1437. 作出球面的内接立方体的映象。

1438. 作出球面的内接正四面体的映象。

1439. 作出球面的外切四面体的映象。

1440. 已知球面和它的一条赤道的映象。点M是球面可见曲面部分上的点M'的映象。作出点M'在此赤道所在平面上的正射影的映象。

1441. 证明：半径为已知的球面的映象是度量确定的。

§4 蒙日(Monge)法

1442. 在正射影图上给出直线 l (l_1,l_2). 作出该直线在平面Π_1和Π_2上的迹线。

1443. 在正射影图上作出迹线$\Sigma\cap\Pi_1$和$\Sigma\cap\Pi_2$，其中Σ平面是由它的不共线三点$A(A_1,A_2)$,$B(B_1,B_2)$,$C(C_1,C_2)$所给定。

1444. 在正射影图上作出直线 l (l_1,l_2)与平面Σ的交点，其中平面Σ是由它的不共线三点$A(A_1,A_2)$，$B(B_1,B_2)$，$C(C_1,C_2)$所给定。

1445. 在正射影图上。给出三角形ABC的射影$A_1B_1C_1$和$A_2B_2C_2$. 作出点$M\in(ABC)$的铅直射影M_2，已知点M的水平射影M_1.

1446. 在正射影图上，给出四面体$ABCD$的水平和铅直射影。作出该四面体与一平面的截线，该平面由它的不共线三点$M(M_1,M_2)$,$N(N_1,N_2)$,$P(P_1,P_2)$所给定。

1447. 在正射影图上求两平面交线的射影，其中每个平面都是由一相交直线对所给定。

1448. 在正射影图上，根据线段$[AB]$的射影$[A_1B_1]$和$[A_2B_2]$求它的实际值。

1449. 在正射影图上，由本身的迹线$m_1\subset\Pi_1$和$l_2\subset\Pi_2$给

出平面Σ。作出从点$A(A_1,A_2)$向平面Σ上所引的垂线足。

1450．平面Π_3垂直于水平平面Π_1和铅直平面Π_2，称它是射影的侧立平面。空间一点M在平面Π_3上的正射影M_3，称作点M的侧立射影。假定平面Π_2与制图面相重合，在将讨论的正射影图上平面Π_1起着Π_3的作用。

设在此正射影图上已给出球面的铅直和侧立射影，并给出了直径$[NS]$的铅直射影$[N_2S_2]$，这里直径$[NS]$平行于平面Π_3而不平行于平面Π_1．利用诸侧立射影，作出下列的铅直射影

（1）对应极点N和S的赤道；

（2）与球面的周线相切于两点的纬线；

（3）与球面周线相切于唯一点的纬线；

（4）位于球面周道内部的纬线。

1451．在正射影图上，给出铅直和侧立射影。利用侧立射影，作出球面的外切圆锥的铅直射影。

§5　透视法

1452．在中心射影下，作出直线$d'(d,d_1)$与一平面的交点．该平面由它的不共线的三点$A'(A,A_1)$，$B'(B,B_1)$，$C'(C,C_1)$所给定。

1453．两相交平面Π'和Ω'中的每一个，都由属于它的一个点和基线在象平面上的透视射影及灭线所给定。作过已知点$M'(M,M_1)$且平行于直线$\Pi'\cap\Omega'$的一直线的透视射影。

1454．在中心射影下，过给定点$M'(M,M_1)$作与已知两异面直线$a'(a,a_1)$、$b'(b,b_1)$相交的直线。

1455．根据在物体平面上的一正方形的一条边的透视射影$[A_1B_1]$，作出该正方形的透视射影。

1456．作出直平行六面体的透视射影，属于物体平面的一正方形是它的底。

1457．作出底在物体平面上的正三棱锥的透视射影。

1458. 在中心射影下，由点$M'(M, M_1)$和灭线p给出平面Π'. 作出位于平面Π'上的正方形之透视射影，以及它的基线的透视射影，如果已知它的一边$[A'B']\ni M'$的透视射影$[AB]$.

1459. 根据位于物体平面上的线段$[A'_1B'_1]$的透视射影$[A_1B_1]$计算它的实际值。

1460. 根据一般位置的线段$[A'B']$的透视射影$[AB]$和它的基线的透视射影$[A_1B_1]$计算它的实际值。

1461. 给出底面在物体平面上的立方体之底面一边的透视射影，作出该立方体的透视射影。

第 四 篇

几何基础　非欧几何

第一章　几何基础

§1　公理法的一般问题

1462．证明：域K上的仿射直线（一维仿射空间）至少含有两个点。

1463．证明：域K上的仿射平面至少含有四个点。

1464．证明：域K上的三维仿射空间至少含八个点。

1465．设V是域K上的n维向量空间。确定在集合V上的仿射空间的结构。

1466．设$M_{n,p}$是域K上的$n\times p$矩阵的集合。在集合$M_{n,p}$上，确定域K上的仿射空间的结构、并指出该空间的维数。

1467．证明：两个仿射空间$A_n(K)$，$A_m(K)$当$m\neq n$时不同构。

1468．仿射空间韦尔(Weyl)公理组可以说成是由1—2〔1〕两个公理组成的。证明第一个公理与第二个公理无关。

1469．证明：仿射空间公理组的韦尔第二公理与第一公理无关。

1470．设$A_2(F_2)$是模2剩余域F_2上的仿射平面。证明在平面$A_2(F_2)$上：

（1）平行四边形的对角线平行；

（2）平行四边形的每个顶点是它的对称中心。

1471．命题：存在两个相似但不相等的三角形，等价于公设Ⅴ．试证之（可以应用欧氏平面几何全部其余公理）。

1472．命题：每个三角形能画出一个外接圆，等价于公设Ⅴ．试证之。

1473．设a和b是平面上的两条不相交直线。命题：集合

$$\{\rho(M,a)\mid M\in b\}$$

有界，等价于公设V.试证之。

1474．命题：过角（小于平角）的任何内点能引一条与角两边相交的直线，等价于公设V．试证之。

1475．证明：平面$A_2(F_2)$上的任何三角形没有中线。

1476．在有限集上对希尔伯特（Hilbert)公理组Ⅰ作出解释。

1477．只用希尔伯特公理组Ⅰ证明：每个平面至少有不位于一条直线上的三个点。

1478．只用希尔伯特Ⅰ,Ⅱ组公理，证明：线段内点的集合非空。

1479．将二底角A和B是直角、并且$[AD]\cong[BC]$的凸四边形$ABCD$，称作萨开里（Saccheri)四边形。$[AB]$是下底、$[CD]$是上底。应用绝对几何公理组证明萨开里四边形的上底两内角相等。并证明 两角不能是钝角。

§2 韦尔公理系统、中学几何学公理系统

1480．设A是有单位元的可换结合环，n是自然数（$n\geqslant1$），将元素$a_i\in A$的n元组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=\vec{a}$$

叫作环A上的n元向量。对A上全部n元向量的集合M按下述规则引进加法：

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)+(b_1, b_2, \cdots, b_n)=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$

再按下述规则引进A中元素和n元向量的乘法：

$$b(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(ba_1, ba_2, \cdots, ba_n).$$

将赋予了上述内部的和外部的结合规则的集合M，叫作环A上的n维（自由的）单式模，或叫作自由A-模。诸n元向量

$$\vec{e}_1=(1, 0, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n=(0, 0, \cdots, 1)$$

构成模M的基底：它们线性无关、并且对每个向量

$$\vec{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\in M$$

有等式成立：

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+\cdots+a_n\vec{e}_n.$$

将集合$E\neq\varnothing$叫作环A上的n维仿射空间，如果给定了映射：

$$\sigma: E\times E\to M$$

(其中M是n维自由A-模)，并且该映射要满足下列两个条件（韦尔公理）：

(1) 对每个$A\in E$映射 $\sigma_A: E\to M$依规则$\sigma_A(B)=\sigma(A,B)$是双射；

(2) $\sigma(A,B)+\sigma(B,C)=\sigma(A,C), \forall A,B,C\in E.$

把M中的诸向量称作空间E的平移，而把A-模叫作空间E的平移M-模。

证明：对任意可换结合环A及任何自然数n，公理组 1—2是相容的。

1481．证明：韦尔公理 1—2 中的每一个和另一个独立（参看 1480题）。

1482．设$M_{n,p}$是有单位元的可换结合环A上的$n\times p$矩阵。在集合$M_{n,p}$上，确定环A上的仿射空间的结构。

1483．设$A_2(\boldsymbol{Z})$是整数环上的仿射平面。证明：对任何有理数$\frac{m}{n}$，存在以$\frac{m}{n}$为斜率的直线。

1484．证明：在平面$A_2(\boldsymbol{Z})$上的每一条直线含有一可数点集。

1485．证明：在平面$A_2(\boldsymbol{Z})$上的两条直线有三种可能：

(1) 平行；

(2) 相交；

(3) 不平行且不相交。

1486．证明：在平面$A_2(\boldsymbol{Z})$上存在无内点的线段。

1487．设M是自由单式n维$\boldsymbol{Z}$-模，并设

$$g: M\times M\to \boldsymbol{Z}$$

是其上的双线性对称形式（和对域R上的向量空间所给出的双线

性对称形式的定义一样)。证明：对所给定的模M的基底($\vec{e}_i$)，线性形g由所给出的矩阵$\|g_{ij}\|$完全确定，$g_{ij}=g_{ji}$，其中$g_{ij}=g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)\in \boldsymbol{Z}$.

1488. 设在n维($n\geqslant 2$)$\boldsymbol{Z}$-模M上给出了双线性型g(1487题)。二向量$\vec{a}, \vec{b}\in M$称作是g-正交的，如果$g(\vec{a}, \vec{b})=0$.

证明：对任意非零向量$\vec{a}\in M$，存在模M的(n-1)维子模M'，使对每个向量$\vec{b}\in M'$ g-正交于向量$\vec{a}$.

1489. 证明：利向正的双线性对称形式不能对n维$\boldsymbol{Z}$-模M引进向量的长度概念，而对域$\boldsymbol{R}$上的向量空间却是成立的。

1490. 在有限集合上，对中学几何公理组Ⅰ作出解释。

1491. 应用中学几何公理组证明：

(1) 每个线段都含有无限点集；

(2) 每个平面都含有不位于一直线上的无限点集；

(3) 空间含有不位于一平面上的无限点集。

1492. 应用中学几何公理组证明：

(1) 任一三角形的内角和等于π；

(2) 存在相似但不相等的三角形；

(3) 每个三角形都能画出一个外接圆；

(4) 过角(小于平角)的任一内点，能作出和角两边都相交的直线。

1493. 证明：从域$\boldsymbol{R}$上的欧氏平面韦尔公理能推出平面运动公理。

1494. 证明：从仿射空间韦尔公理能推出平行公理。

1495. 证明：欧氏平面上的三角形的各角满足等式：

$$\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}=1-2\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}.$$

由此可得出结论：$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.

1496. 应用向量的数量积，证明三面角的面角定理：三面角的任意两个面角之和大于第三个面角，而全部三个面角之和小于360°.

1497. 证明：如果点C位于点A和B之间，则点C也位于B和

A之间(应用属于、距离和顺序公理)。

1498．证明：若点C位于点A和点B之间，则点A不位于点B和点C之间且点B不位于点A和点C之间（利用属于、距离和顺序公理)。

1499．已知不属于一条直线的三个点。应用属于、距离和顺序公理，证明：过这三个点不能画出两个不同的圆。

1500．应用属于、距离和顺序公理，证明：在给定的以(AB)为边界的半平面内，不存在两个不同的点P和Q，使

$$|PA|=|QA|,\quad |PB|=|QB|.$$

1501．应用属于、距离和顺序公理证明：不存在三个不同的平面的位移，使点A变成点A_1、点B变成点B_1，这里$|AB|=|A_1B_1|$.

1502．证明：平面上的任意对合的位移，至少有一个不动点。

1503．应用前四组公理，证明：平面上的各轴都过同一点的三个轴对称的合成是轴对称。

1504．证明：平面的偶数个轴对称的任何合成，都不能用奇数个轴对称的合成来代替。

1505．证明：如果平面的位移保持有不属于一条直线的三个不动点，则该位移必是恒等变换。

1506．已知下列条件：

$$|AB|=|A_1B_1|,\ |BC|=|B_1C_1|,\ |CA|=|C_1A_1|$$

$$\text{和}\qquad A\to A_1,\quad B\to B_1,\quad C\to C_1\ ,$$

证明：存在唯一的能将三角形ABC变成三角形$A_1B_1C_1$的平面的位移。

1507．把射线$[OM)$称作角AOB的平分线，如果该角含有这条射线并且角AOM和角BOM相等。证明：对平面的每个角都有角平分线、且仅有一条。

1508．证明：如果点A，B，$C\in E_3$但不属于一条直线，则有且仅有空间的两个位移f_1和f_2，它们使每个点都是不动点；

$$f_k(A)=A,\quad f_k(B)=B,\quad f_k(C)=C\ (k=1,2).$$

1509．证明，如果在空间里已知两个三角形ABC和$A_1B_1C_1$，并且

$$|AB|=|A_1B_1|,\ |BC|=|B_1C_1|,\ |CA|=|C_1A_1|.$$

则有且仅有空间的两个位移f_1，f_2，把其中第一个三角形变成第二个三角形，并使

$$f_k(A)=A_1,\ f_k(B)=B_1,\ f_k(C)=C_1,\ (k=1,2).$$

1510．证明：如果$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$是两个四面体，并且

$$|AB|=|A_1B_1|,\quad |AC|=|A_1C_1|,\quad |AD|=|A_1D_1|,$$

$$|BC|=|B_1C_1|,\quad |CD|=|C_1D_1|,\quad |DB|=|D_1B_1|,$$

则有空间E_3的唯一的位移，把其中第一个四面体变成第二个四面体，且使

$$A\mapsto A_1,\quad B\mapsto B_1,\ C\mapsto C_1,\ D\mapsto D_1.$$

第二章 非欧几何

§1 球面几何

1511．证明：球面三角形的每条边小于其它两边之和，而大于它们之差。

1512．证明：在每个球面三角形中，其二角之和与第三角之差小于π，而其三角之和属于区间$(\pi, 3\pi)$．

1513．证明：在球面三角形里如果两边相等，则它们的对角也相等。

1514．证明：在球面三角形里等角对等边。

1515．证明：在球面三角形里大角必对大边。

1516．证明：在球面三角形里大边必对大角。

1517．计算地球一纬线的弧长，它含有的度数为$\alpha=12°15'$，且过纬度$\varphi=37°24'$的一点。地球半径$R=6370$公里。

1518．在边长为a，b，c，各边所对的顶角是$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$的球面三角形里，证明有下列《五元素公式》成立：

$$\sin\frac{a}{r}\cos\hat{B}=\sin\frac{c}{r}\cos\frac{b}{r}-\cos\frac{c}{r}\sin\frac{b}{r}\cos\hat{A}.$$

其中r是含有该三角形的的球面半径。

1519．证明：对球面三角形下列《五元素公式》成立：

$$\sin\hat{A}\cos\frac{b}{r}=\sin\hat{C}\cdot\cos\hat{B}+\cos\hat{C}\cdot\sin\hat{B}\cdot\cos\frac{a}{r}.$$

1520．如果已知球面三角形三个角的值（假定球面的半径已知为r），证明：可以求出它的各边之长。

1521．对球面三角形导出下列《四元素公式》

$$\sin\frac{a}{r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{b}{r}=\sin\hat{C}\cdot\operatorname{ctg}\hat{B}+\cos\frac{a}{r}\cdot\cos\hat{C}.$$

1522. 证明：在直角球面三角形里下列公式成立$\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$：

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}$$

（球面毕达哥拉斯（Pythagoras）定理）。

1523. 证明：在直角球面三角形$\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$里有：

$$\sin\frac{b}{r}=\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\hat{B}\ .$$

1524. 证明：如果球面三角形中的角A是直角，则

$$\operatorname{tg}\frac{b}{r}=\operatorname{tg}\frac{a}{r}\cdot\cos\hat{C}\ .$$

1525. 对直角球面三角形$\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$推导公式：

$$\operatorname{tg}\frac{b}{r}\cdot\operatorname{ctg}\hat{B}=\sin\frac{c}{r}\ .$$

1526. 对直角球面三角形$\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$推导公式：

$$\cos\frac{a}{r}=\operatorname{ctg}\hat{B}\cdot\operatorname{ctg}\hat{C}\ .$$

1527. 对直角球面三角形$\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$推导公式：

$$\cos\hat{B}=\sin\hat{C}\cdot\cos\frac{b}{r}\ .$$

1528. 证明：如果在直角球面三角形$\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$里下列关系式成立：

$$\frac{b}{r}<\frac{\pi}{2},\quad \frac{c}{r}<\frac{\pi}{2}\quad\left(\text{或}\ \frac{b}{r}>\frac{\pi}{2},\quad \frac{c}{r}>\frac{\pi}{2}\right)$$

则有

$$\frac{a}{r}<\frac{\pi}{2},$$

而如果有：

$$\frac{b}{r}<\frac{\pi}{2},\quad \frac{c}{r}>\frac{\pi}{2}\left(\text{或}\frac{b}{r}>\frac{\pi}{2},\quad \frac{c}{r}<\frac{\pi}{2}\right)$$

则有

$$\frac{a}{r}>\frac{\pi}{2}.$$

1529．证明：如果在直角球面三角形 $\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$里下列关系式成立：

$$\hat{B}<\frac{\pi}{2},\quad \hat{C}<\frac{\pi}{2}\left(\text{或}\hat{B}>\frac{\pi}{2},\quad \hat{C}>\frac{\pi}{2}\right),$$

则有

$$\frac{a}{r}<\frac{\pi}{2},$$

而如果

$$\hat{B}<\frac{\pi}{2},\quad \hat{C}>\frac{\pi}{2}\left(\text{或}\hat{B}>\frac{\pi}{2},\quad \hat{C}<\frac{\pi}{2}\right),$$

则有

$$\frac{a}{r}>\frac{\pi}{2}.$$

1530．设大圆上的弧 BD 垂直于球面三角形 ABC 的边 AC，并且该弧之长 $h_b<\pi\cdot r$（此弧 BD 称作球面三角形由顶点 B 所引的高线）。证明有下列等式成立：

$$\sin\frac{h_b}{r}=\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\hat{C}=\sin\frac{c}{r}\cdot\sin\hat{A}$$

1531．证明：在任意球面三角形里有下列等式成立：

$$\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{h_a}{r}=\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{h_b}{r}=\sin\frac{c}{r}\cdot\sin\frac{h_c}{r}.$$

1532．在直角球面三角形里 $\left(\hat{A}=\frac{\pi}{2}\right)$：

（1）已知：$\frac{b}{r}=150°52'$，$\frac{c}{r}=114°15'$；

求：$\frac{a}{r}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$；

(2) 已知：$\frac{a}{r}=80°$，　$\frac{b}{r}=47°39'$；

求：$\frac{c}{r}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$；

(3) 已知：$\frac{b}{r}=38°28'$，　$\hat{B}=56°1'$；

求：$\frac{a}{r}$，$\frac{c}{r}$，$\hat{C}$；

(4) 已知：$\frac{b}{r}=37°52'$，$\hat{C}=45°35'$；

求：$\frac{a}{r}$，$\frac{c}{r}$，$\hat{B}$；

(5) 已知：$\frac{a}{r}=110°46'$，$\hat{C}=153°58'$；

求：$\frac{b}{r}$，$\frac{c}{r}$，$\hat{B}$；

(6) 已知：$\hat{B}=80°11'$，　$\hat{C}=154°58'$；

求：$\frac{a}{r}$，$\frac{b}{r}$，$\frac{c}{r}$。

1533．证明：应用下列公式可以用球面三角形的各边计算它的各角：

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{r}\cdot\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}}},$$

$$\cos\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{r}\cdot\sin\frac{p-a}{r}}{\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}}},$$

其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$ 是球面三角形周长之半。

1534．证明：对球面三角形有下列公式成立：

$$\sin\frac{a}{2r}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\left(\hat{A}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}},$$

$$\cos\frac{a}{2r}=\sqrt{\frac{\sin\left(\hat{B}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\sin\left(\hat{C}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}},$$

其中 $\varepsilon=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi$ 是该球面三角形的超出量。

1535．推导球面三角形的下列讷皮尔（Napier）公式：

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2r}}{\cos\frac{a+b}{2r}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2r}}{\sin\frac{a+b}{2r}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2};\qquad(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2r}=\frac{\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2r},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2r}=\frac{\sin\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2r}.\qquad(\beta)$$

（应用这些公式能根据两边及其夹角或两角与其夹边来解球面三角形）。

1536．为计算球面三角形的超出量，推导下列公式：

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{b}{2r}+\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}},$$

其中 $\hat{C}$ 是三角形各角中最大的角。

1537．在球面三角形 ABC 里：

(1) 已知：$\frac{a}{r}=60°32'$，$\frac{b}{r}=117°23'$，$\frac{c}{r}=78°$[illegible]$2'$；

求：$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$；

(2) 已知．$\hat{A}=47°59'$，$\hat{B}=130°47'$，$\hat{C}=56°45'$；

求：$\frac{a}{r}$，$\frac{b}{r}$，$\frac{c}{r}$；

(3) 已知：$\frac{a}{r}=40°29'$，$\frac{b}{r}=110°19'$，$\hat{C}=56°41'$；

求：$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\frac{c}{r}$；

(4) 已知：$\hat{A}=59°32'$，$\hat{B}=77°18'$，$\frac{c}{r}=31°30'$；

求：$\hat{C}$，$\frac{a}{r}$，$\frac{b}{r}$．

§2 黎曼椭圆几何

1538．证明：在椭圆平面 S_2 上，关于直线 a 的轴对称和关于点 A 的中心对称重合，如果点 A 是直线 a 的极点。

1539．证明：两个中心对称的合成是旋转。作出旋转中心并求转角的值。

1540．证明：在平面 S_2 上的任何两条直线都相交。

1541．在 S_2 上，在何种情况下圆是直线？

1542．求具有公共端点的两个线段中点间的距离。

1543．证明，在椭圆平面上仅有三种位移：旋转一个异于

π的角，中心（或轴）对称和恒等变换。

1544．设G是一个群并且$M\subset G$．含有子集M的群G之全部子群的交，是G的子群$\{M\}$．此时它仅含有群G的这样元素，这些元素至少有一种方法写成M中有限个元素乘积的形式。如果$\{M\}=G$，则子集M叫作G的生成组。

证明：全部中心对称的集合是平面S_2的运动群的生成组。

1545．证明：两直线间的夹角等于它们极点间的距离或等于这两条直线和它们的公垂线两交点间的距离（取$r=1$）。

1546．证明：不属于一直线的三个点，是四个三角形的顶点，并且对其中每个三角形三角不等式都成立。

1547．在中心对称里哪些直线是不动的？

1548．证明：过不属于一条直线的三个点能作四个圆。

1549．已知两个点A和B，以及另外两个点A_1，B_1，使

$$\rho(A,\ B)=\rho(A_1,\ B_1)>0\ .$$

证明：当

$$\rho(A,\ B)\neq\frac{\pi}{2}r$$

时，存在两个运动把A变成A_1和把B变成B_1．

1550．已知两点A和B，以及

$$\rho(A,\ B)\ =\frac{\pi}{2}r\ .$$

有多少保持点A和B不变的运动？

1551．要使一个四边形能有外接圆，求这样的四边形各边之间应有的相依关系。

1552．证明：如果三角形二边中点间的距离等于$\frac{\pi}{2}r$，则第三边的中点到前二边中点间的距离也都等于$\frac{\pi}{2}r$．

1553．已知三角形ABC．证明：如果

$$\rho\ (A,\ C)\ +\rho\ (B,\ C)\ =\pi r\ ,$$

则中线 CC_1 的长等于$\frac{\pi}{2}r$.

§3 罗巴切夫斯基双曲几何

1554．证明：在罗氏平面上，立在直径上的圆周角是锐角。

1555．证明：连接三角形两边中点的线段之长大于第三边之长的一半。

1556．证明：在直角三角形里，两锐角中至少有一个锐角的值小于$\frac{\pi}{4}$.

1557．证明：如果三角形两边的两条中垂线平行，则第三边的中垂线在同一方向与前两条中垂线平行。

1558．作两条离散直线的公垂线。

1559．过圆外一点向该圆引切线。

1560．过不属于极限圆的已知点向该极限圆引切线。

1561．证明：两个中心对称的合成是错切。错切的距离等于什么？

1562．证明：两个轴对称的合成是错切，其轴是离散的。作出错切轴并求此错切的距离。

1563．过已知点作和已知直线相切的极限圆。

1564．根据上底和腰作萨开里四边形。

1565．证明：对角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直角边较斜边之半大。

1566．证明：正六边形的边长大于其外接圆的半径。

1567．证明：凸 n 边形的面积等于

$$\pi(n-2)-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i,$$

其中 φ_i 是 n 边形各角的值（曲率半径等于1）。

1568．证明：如果一个三角形的各角和另一个三角形的各角

对应相等，则这两个三角形全等（合同）。

1569．在罗氏平面开莱——克来因（Cayley—Klein）模型上，作已知线段的中点和已知角的平分线。

1570．在开莱——克来因模型的给定射线上，从它的始点起截取和已知线段相等的线段。

1571．在开莱——克来因模型上，对已知锐角作与它相对应的平行线段且反向；对已知线段作与它相对应的平行角。

1572．在罗氏平面上，取一个比展开角小的任意角$A'AA''$．证明：存在唯一的一条直线，在其一个方向平行于直线(AA')，而在另一方向平行于直线(AA'')．

1573．证明：对任何两条不重的平行直线(AA')和(BB')，存在唯一的一条直线，它在其一个方向平行直线(AA')，而在其另一个方向平行直线(BB')．

第五篇

拓扑学初步

欧氏空间的曲线和曲面

第一章 拓扑学初步

§1 拓扑空间、同胚

1574. 证明：集合 X 的任何**拓扑簇**的交是 X 的拓扑。

1575. 证明：如果集合 X 含有的点多于两个，则集合 X 的两个拓扑的并可能不是 X 的拓扑。

1576. 设 (X, T) 是一个**拓扑空间**。对每一点 $x\in X$，用 O_x 表示点 x 的全部**邻域**簇。证明：

（1）若 $U\in O_x$，则 $x\in U$；

（2）若 $U,V\in O_x$，则 $U\cap V\in O_x$；

（3）若 $U\in O_x$ 且 $U\subset V$，则 $V\in O_x$；

（4）若 $U\in O_x$，则存在元素 $V\in O_x$，它满足两个条件：

(a) $V\subset U$；

(b) $V\in O_y$，$\forall y\in V$，即 V 是它自己每个点的邻域。

1577. 设把集合 X 的每个元素 x 与集合 X 的子集合中的一个集合 O_x 相对应，使 1576 题中的性质 1—4 成立。证明：在 X 中存在唯一的拓扑结构，它使 O_x 成为点 x（对任意元素 $x\in X$）的全部邻域簇。

1578. 如果 (X,T) 是具有可数基的空间，则该空间的每个基都含有它的某一可数基。

1579. 如果集合 A 在空间 (X, T) 里是稠密的并且 $U\in T$，则 $U\subset\overline{A\cap U}$。

1580. 在数直线上，求各种不同区间的**内部**、**闭包**和**边界**。

1581. 设 A 是拓扑空间 (X, T) 的一个集合，以及 $\alpha(A)=\mathring{\bar{A}}$，$\beta(A)=\overline{\mathring{A}}$。证明：

(1) $\alpha(\alpha(A))=\alpha(A)$ 和 $\beta(\beta(A))=\beta(A)$；

(2) 如果 A 是开的，则 $A\subset\alpha(A)$；如果 A 是闭的，则 $A\supset\beta(A)$。

1582．证明：在欧氏空间里，具有有理半径和有理中心的诸开球面构成拓扑基。

1583．在平面 E_2 上给出集合 A 的几个例子，使各集合 A，$\mathring{A}$，$\bar{A}$，$\alpha(A)$，$\beta(A)$（参看1581）两两相异。

1584．证明：$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$。

1585．证明：$b(\mathring{A})\subset b(A)$ 和 $b(\bar{A})\subset b(A)$。举出一例，其中这三个集合两两互异。

1586．证明：

$$b(A\cup B)\subset b(A)\cup b(B)。$$

给出一例，其中这两个集合不同。

1587．证明：如果 $\bar{A}\cap\bar{B}=\varnothing$，则

$$b(A\cup B)=b(A)\cup b(B)。$$

1588．设给出了集合 X 和映射 f：

$$R(X)\to R(X)，$$

它满足下列四个条件（其中记 $\bar{A}=f(A)$）：

(1) $\bar{\varnothing}=\varnothing$；

(2) $A\subset\bar{A}$；

(3) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$；

(4) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，$\forall A\subset X$、$\forall B\subset X$。

证明：在 X 里有且仅有唯一的拓扑，在其中对任何 $A\subset X$，$\bar{A}$ 是 A 的包。

1589．证明：在连续映射下，连通空间的象是连通的。

1590．证明：

(1) 数直线的任何两个开区间都是同胚的；

(2) 任何两个闭区间是同胚的；

(3) 任何两个半开区间是同胚的；

(4) 开区间即不与闭区间、也不与半开区间同胚；闭区间不与半开区间同胚。

1591．证明：欧氏平面的子空间

$$\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$$

与数直线的任何子空间不同胚。

1592．证明：欧氏空间 E_n 的任何两个开凸子集是同胚的，关于 E_n 中的两个闭凸子集应如何？

1593．求由两个元素组成的集合的全部拓扑。

1594．举出连续映射的例子，在此映射下开（闭）集的象不是开集（对应成闭集）。

1595．证明：椭圆面与球面同胚。

1596．证明：单叶双曲面与椭圆柱面同胚。

1597．证明：双叶双曲面与平行平面对同胚。

1598．证明：每个抛物面与平面同胚。

1599．证明：椭圆柱面与开环面同胚。

1600．证明：双曲柱面与平行平面对同胚。

1601．证明：抛物柱面与平面同胚。

1602．证明：非退化的二次锥面与在圆心处粘合的开圆对同胚。

1603．证明：双叶双曲面与双曲柱面同胚。

§2　流形、欧拉特征数

1604．设 X 和 Y 是拓扑流形。对流形 X 的每个图 φ（定义域为 U）和流形 Y 的每个图 ψ（定义域为 V），按下列规则规定 $X\times Y$ 的以 $U\times V$ 为定义域的图 $\varphi\times\psi$：

$$(\varphi\times\psi)(x,\ y)=(\varphi(x),\ \ \psi(y)),\ \ \forall x\in U,\ \forall y\in V.$$

验证由这个乘积 $X\times Y$ 的规则所给出的乘积（它叫作已知两流形 X 和 Y 的乘积）具有流形结构的性质。再证明：椭圆柱面是数直线与圆的乘积，但环面则是两圆的笛氏乘积。*

* 原题是一圆的笛氏平方——译者注。

1605. 证明：双曲柱面是数直线与双曲线的乘积，而抛物柱面则是数直线与抛物线的乘积。

1606. 验证：单叶双曲面能被一个图的坐标邻域所复盖。

1607. 证明：双叶双曲面不能被一个图的坐标邻域所复盖，但能被两个图的坐标邻域所复盖。

1608. 验证 椭圆面能被两个图的坐标邻域所复盖。

1609. 验证：二次锥面能被两个图的坐标邻域复盖。

1610. 验证：欧氏空间的球面

$$x^2+y^2+z^2=1$$

能被六个半球面：球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及 $z>0$， $z<0$，$y>0$，$y<0$，$x>0$，$x<0$所复盖，其中每一个都是这个球面的某个图的定义域。

1611. 验证：由圆

$$(x-2)^2+z^2=1$$

绕轴 (Oz) 旋转而得到的环面能被十二个坐标邻域所复盖。

1612. 证明：在平面 (xOy) 上由等式

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

所确定的极坐标 $(r,\ \theta)$，可以取来作不含坐标原点的任何开圆的局部坐标。

1613. 验证：空间$\boldsymbol{R}^2$的子空间

$$X=\{(x,\ y)\in\boldsymbol{R}^2\mid y\geqslant 0,\quad x(x^2-y^2)=0\}$$

不是流形，但

$$Y=\{(x,\ y)\in X,\quad x\geqslant 0\}$$

是流形(带边的)。

1614. 验证：$\boldsymbol{R}^n$ 里的任何开子集都是流形。

1615. 设 $M(m,n)$ 是实数域上的所有$(m\times n)$一矩阵的集合（矩阵有 m 行和 n 列）。证明 $M(m,n)$ 是流形。

1616. 设 $R(p,V)$ 是实的 n 维向量空间 V 的、p 个线性无关向量的全部有序组的集合（集合 $R(p,V)$ 叫作向量空间 V 的 p-标架空间）。证明：$R(p,V)$ 是流形。

1617. 设V是实的n维向量空间，以及$G(p,V)$是V的全部p维子空间的集合。证明：$G(p,V)$是$p(n-p)$维流形（空间V的**格拉斯曼**(Grassmann)**流形**）。

1618. 证明：射影空间P_n的全部p维平面的集合$G(p,n)$是$(p+1)(n-p)$维流形（它叫作具有**指标**p、n的格拉斯曼流形）。

1619. 求闭圆盘的欧拉特征数。

1620. 求闭圆环的欧拉特征数。

1621. 求环面的欧拉特征数。

1622. 计算n角棱柱侧面的欧拉特征数。

1623. 计算n角棱锥侧面的欧特征数。

第二章　欧氏空间曲线

在本章我们假定在空间 E_3 里给出的是笛卡儿直角坐标系。

§1　光滑曲线、切线、弧长

1624．设 $I=[0,1)$，$I'=[1,+\infty)$。证明浸没的等价性：

$f: I\to E_3 \mid x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t+3,$

$$g: I'\to E_3 \mid x=\cos\frac{\tau-1}{\tau+1},\quad y=\sin\frac{\tau-1}{\tau+1},\quad z=\frac{5\tau+1}{\tau+1}.$$

1625．设 $I=(2,+\infty)$，$I'=(e^2,+\infty)$．证明浸没的等价性：

$f: I\to E_3 \mid x=e^t+1,\ y=3e^t-2,\ z=\ln t+1,$

$g: I'\to E_3 \mid x=\tau+1,\ y=3\tau-2,\ z=\ln\ln\tau+1.$

1626．设 $I=[0,1]$，$I'=[0,1]$．证明：不能选着这样的连续函数 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$g_1(\tau)$，$g_2(\tau)$ 使浸没

$f: I\to E_3 \mid x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=t,$

$g: I'\to E_3 \mid x=g_1(\tau),\ y=g_2(\tau),\ z=2\tau+1$

是等价的。

1627．证明在1624题中的浸没 f 和 g 是 C^∞—等价的。

1628．证明在 1625 题中的浸没 f 和 g 是 C^∞—等价的。

1629．由浸没 f：

$$I\to E_3 \mid x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right),\quad y=a\sin t,\ z=0$$

给出了曲线 γ（这样的曲线叫作曳物线）．其中 $I=(0,+\infty)$。确定曲线 γ 的光滑类。

1630．由如下参数方程给出曲线 γ．

$$\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \\ z=e^t, \qquad -\infty<t<+\infty. \end{cases}$$

确定曲线 γ 的光滑类，并再写出该曲线在点 $t=0$ 处的切线方程。

1631 由参数方程给出曲线 γ

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt, \qquad -\infty<t<+\infty. \end{cases}$$

其中 $a=\text{const}\neq0$，$b=\text{const}\neq0$.将曲线γ叫作**寻常螺旋线（圆形螺旋线）**。证明：曲线 γ 位于一圆柱面上，并且它的所有切线与该圆柱面的母线夹角都一样。

1632. 证明： 曲线：

$$\begin{cases} x=a\sin^2 t, \\ y=a\sin t\cos t, \\ z=a\cos t, \qquad -\infty<t<+\infty, \quad a=\text{const} \end{cases}$$

的诸法平面属于同一面把。

1633. 设给出一曲线：

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x^2-y^2-z^2=1. \end{cases}$$

写出该曲线在任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的法平面方程。

1634. 证明：曲线：

$$\begin{cases} x=a\operatorname{tg} t, \\ y=b\cos t, \\ z=b\sin t, \end{cases}$$

位于双曲抛物面上，其中$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，

$$a=\text{const}, \quad b=\text{const}.$$

1635. 证明曲线：

$$\begin{cases} x = \sin 2\varphi, \\ y = 1 - \cos 2\varphi, \\ z = 2\cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \end{cases}$$

位于一球面上。写出该曲线在点 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程。

1636. 写出曲线：

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

在点 (1，3，4) 处的切线方程。

1637. 写出曲线：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x = y \end{cases}$$

在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线方程。

1638. 已知光滑曲线 γ 和点 C ．在点 $M \in \gamma$ 处作曲线 γ 的切线 (MT)，用点 M' 表示点 C 在切线 (MT) 上的正射影。将图形

$$\gamma' = \{M', M \in \gamma\}$$

叫作曲线 γ 关于点 C 的**垂足曲线**。求抛物线关于它焦点的垂足曲线。

1639. 求椭圆关于它一焦点的垂足曲线。

1640. 求双曲线关于它一焦点的垂足曲线。

1641. 已知螺旋线

$$x = 3a\cos t, \ y = 3a\sin t, \ z = 4at \ .$$

求该螺旋线与平面 xOy 的交点到其任一点 $\gamma(t)$ 处的弧长。

1642. 求曲线

$$x^3 = 3a^2 y, \quad 2xz = a^2$$

在两平面

$$y = \frac{a}{3} \text{和} \ y = 9a$$

之间的弧长。

1643. 已知一曲线：

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \\ z=4a\cos\dfrac{t}{2}, \end{cases}$$

$$a=\text{const}>0, \quad -\infty<t<+\infty.$$

求该曲线与平面 xOz 两个交点之间的一个螺旋弧长。

1644. 求闭曲线

$$\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \\ z=\cos 2t, \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \end{cases}$$

的长。

1645. 写出螺旋线的参数方程(参看1631题),取弧长作参数。

1646. 求曲线

$$\begin{cases} x=a\operatorname{ch} t, \\ y=a\operatorname{sh} t, \\ z=at \end{cases}$$

在两点 $M_0(0)$，$M_1(t)$ 之间的弧长。

1647. 求星形线的长：

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \\ z=0, \end{cases}$$

1648. 设有一圆和其上一点 A，该圆沿一条固定直线（轴 (Ox)）无滑动的滚动、并且始终在过直线 (Ox) 的同一平面上（在平面 (xOy) 上），称点 A 画出的曲线为**旋轮线**. 写出旋轮线的参数方程。证明旋轮线是**简单曲线**但不是光滑曲线。

1649. 证明旋轮线的一部分

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \\ z=0, \quad\quad 0<t<2\pi \end{cases}$$

是光滑曲线。求该旋轮线一拱弧的长（把端点为 $t=2\pi k$，$t=2\pi(k+1)$ 的旋轮线的弧称作它的一拱弧，其中 k 是任意整数）。

1650．由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

给出一条光滑曲线。写出它在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处之切线方程和法平面方程。

1651．证明悬链线

$$\begin{cases} y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}, \\ z=0 \end{cases}$$

具有下述性质。设点 M_0 是它的任意一点，M'_0 是点 M_0 在 (Oy) 轴上的正射影，$[O_1M''_0]$ 是线段 $[OM'_0]$ 向悬链线在点 M_0 处切线上的正射影。这时线段 $[O_1M''_0]$ 的长等于悬链线上以 $A(0,a,0)$（悬链线的顶点）和 M_0 为端点的弧长。

§2 曲线的典型标架、曲率和挠率

1652．证明：如果曲线 γ 的所有密切面都经过一个定点，则曲线 γ 是平曲线。

1653．求曲线

$$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3\ *$$

在坐标原点处的典型标架的坐标向量。

1654．求曲线

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), & -\infty<t<+\infty, \\ y=a(1-\cos t), & a=\text{const}>0, \\ z=4a\cos t, \end{cases}$$

---

* 原书误印为 $x=t^3$——译者注。

在其任意点处的典型标架的坐标向量。

1655．求曲线

$$\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \\ z=\cos 2t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi \end{cases}$$

在其任意点处的典型标架的坐标向量。

1656．求曲线

$$\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=t\cos t, \\ z=te^t \end{cases}$$

在坐标原点处的典型标架的坐标向量。

1657．写出曲线

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=e^t$$

在点 $t=0$ 处的**主法线**方程。

1658．已知曲线

$$\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \\ z=\cos 2t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

写出该曲线在它任意点处的密切平面的方程。

1659．已知曲线

$$\begin{cases} x=\cos\alpha\cos t, \\ y=\cos\alpha\sin t, \quad \alpha=\text{const}, \\ z=t\sin\alpha, \quad -\infty<t<+\infty. \end{cases}$$

在该曲线**副法线**正向截取恒等单位长的线段。写出由这些线段的端点所得新曲线密切平面的方程。

1660．已知曲线

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{t}, \\ y=\ln t, \\ z=-t^2, \quad 0<t<+\infty. \end{cases}$$

在该曲线上求这样的点，在这些点处的副法线平行于平面：

$$x-y+8z+2=0.$$

1661．在螺旋线的诸副法线的正向截取同样长的各线段。证明这些线段的各端点位于另一螺旋线上。

1662．写出下列曲线的密切平面方程：

（1） $y^2=x,\quad x^2=z,$ 在点$(1,1,1)$处；

（2） $x^2-z^2=a^2,\quad y^2+z^2=b^2,$ 在点$(a,b,0)$ 处；

（3） $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t\sqrt{2},\ -\infty<t<+\infty$在点 $t=0$处。

1663．已知螺旋线：

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \\ z=bt. \end{cases}$$

写出主法线、副法线、密切面、法平面、从切（化直）平面的方程，并求该曲线在任意点处的典型标架的坐标向量。

1664．已知曲线：

$$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \\ z=\operatorname{tg} t, \quad -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

写出在点 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线、法平面、副法线、密切平面、主法线和从切（化直）平面的方程。还在该点处求典型标架的坐标向量。

1665．已知曲线：

$$\begin{cases} x=a_1t^2+b_1t+c_1, \\ y=a_2t^2+b_2t+c_2, \\ z=a_3t^2+b_3t+c_3. \end{cases}$$

$-\infty<t<+\infty,\quad a_i=\text{const},\quad b_i=\text{const},$

$c_i=\text{const}\ (i=1,2,3)$。证明该曲线是平面曲线，并求该曲线所在平面方程。

1666. 已知曲线：

$$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \\ z=4\sin\dfrac{t}{2}, \quad -\infty<t<+\infty. \end{cases}$$

计算该曲线在点 $t=\pi$ 处的曲率。

1667. 已知曲线：

$$\begin{cases} x=a\operatorname{ch}t, \\ y=a\operatorname{sh}t, \quad a=\text{const}>0, \\ z=at, \quad -\infty<t<+\infty. \end{cases}$$

求该曲线在它任意点处的曲率和挠率。

1668. 证明：寻常螺旋线的曲率和挠率是定值。

1669. 证明：如果一曲线的曲率和挠率是异于零的定值，则该曲线是寻常螺旋线。

1670. 设 γ_1 和 γ_2 是两条光滑曲线，如果在它们之间存在这样的双射 $f: \gamma_1 \to \gamma_2$，对任意一点 $M \in \gamma$，使这两条曲线在点 M 和点 $f(M)$ 的两条切线是平行的。证明：此时在该两点处的两条主法线、两条副法线也是平行的。

1671. 证明：如果非平面曲线具备下列性质之一：

（1）它的切线与某方向组成定角；

（2）它的副法线与某方向组成定角；

（3）它的主法线平行于某平面；

（4）$\dfrac{\kappa}{k}=\text{const}$，

则它也具备其余三条性质（这样的曲线叫作广义螺旋线）。

1672. 证明曲线：

$$\begin{cases} x^2=3y, \\ 2xy=9z \end{cases}$$

是广义（一般）螺旋线。

1673. 证明曲线：

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=\ln t, \\ z=t^2, \quad 0<t<+\infty \end{cases}$$

是广义（一般）螺旋线。

1674. 已知曲线：

$$\begin{cases} x=at, \\ y=bt^2, \quad -\infty<t<+\infty. \\ z=ct^3, 这里 a, b, c 是常数 \end{cases}$$

在什么条件下此曲线才能是广义（一般）螺旋线？

1675. 证明：弗雷纳（Frenet）公式

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu}, \qquad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=-k\vec{\tau}+\kappa\vec{\beta}, \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\kappa\vec{\nu}$$

可以写成如下形式：

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=[\vec{\omega}, \vec{\tau}], \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=[\vec{\omega}, \vec{\nu}], \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=[\vec{\omega}, \vec{\beta}].$$

求向量 $\vec{\omega}$（达布(Darboux)向量）。

1676. 证明：如果一曲线的所有法平面平行于一个方向，则，该曲线或是直线或是平面曲线。

1677. 证明：如果一曲线（异于直线）的所有密切平面平行于一个方向，则此曲线是平面曲线。

1678. 证明：如果一曲线的所有从切（化直）平面平行于一个方向，则该曲线是广义（一般）螺旋线。证明它的逆命题，并求与广义螺旋线的所有从切平面均平行的向量。

1679. 证明：如果两条曲线 γ_1 和 γ_2 有公共主法线（贝特朗(Bertrand)曲线），则曲线 γ_1（曲线 γ_2 也同样）的曲率和挠率具有线性关系：

$$ak+b\kappa=1 \quad (a=\text{const}, \quad b=\text{const}).$$

1680. 证明：如果一曲线 γ 的曲率和挠率之间具有如下形式的线性关系：

$$ak+b\kappa=1 \quad (a=\text{const}\neq 0, \quad b=\text{const}\neq 0)$$

则存在曲线γ'，它与曲线γ有公共主法线。

1681．证明：曲率为$k=\text{const}\neq 0$的曲线是贝特朗曲线（参看1679题）。

1682．求旋轮线的渐屈线：

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \\ z=0, \end{cases} \qquad -\infty<t<+\infty.$$

1683．求抛物线：

$$\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0 \end{cases}$$

的渐屈线。

1684．求下列曳物线的渐屈线：

$$\begin{cases} x=-a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right) \\ y=a\sin t, \\ z=0, \end{cases} \qquad 0<t<+\infty.$$

第三章　欧氏空间曲面

（在空间E_3里给出的是笛卡儿直角坐标系）

§1 光滑曲面、切平面和法线

1685. 证明浸没的等价性：

$f: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow E_3 \mid x=u^1,\ y=u^2,\ z=u^1u^2,$

$g: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow E_3 \mid x=v^1+v^2,\ y=v^1-v^2,\ z=(v^1)^2-(v^2)^2.$

1686. 证明1685题中的浸没f和g C^∞－等价。

1687. 用如下浸没给出了曲面F：

$$f:\ \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow E_3 \mid x=pu^1\cos u^2,\ y=qu^1\sin u^2,\ z=\frac{1}{2}(u^1)^2.$$

$$p=\text{const}>0,\ q=\text{const}>0.$$

确定曲面F的光滑类。

1688. 在光滑曲线$\vec{\rho}=\vec{\rho}(u^1)$的各点处给出向量场$\vec{e}=\vec{e}(u^1)$。写出**直纹曲面**方程，它以已知曲线为准曲线、而向量$\vec{e}(u^1)$是对应直母线的方向向量。

1689. 给出两条曲线

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1),\quad \vec{\rho}=\vec{\rho}(u^2).$$

写出由两端点位于两条已知曲线上的线段之中点所组成的曲面方程（平移曲面）。

1690. 写出**悬链面**方程，该曲面是由悬链线

$$y=a\,\text{ch}\frac{x}{a},\ z=0$$

绕轴（Ox）旋转而形成的。

1691. 所谓**劈锥面**就是直纹曲面的直母线平行于给定平面（劈锥面的准平面）、并且相交于给定直线（因而劈锥面的准曲线之一是直线——劈锥面的准直线）。要给出劈锥面只要给出准

平面、准直线以及某一条准曲线就够了。写出以$z=0$为准平面、以$x=a$，$y=0$为准直线、以$y^2=2px$，$x=0$为准曲线的劈锥面方程。

1692. 证明：由三个坐标面及曲面

$$xyz=a^3$$

的切平面相交而成的四面体的体积，与在曲面上切点的选取无关。

1693. 给出了曲面：

$$\begin{cases} x=(u^1\sin u^2)^3, \\ y=(u^1\cos u^2)^3, \\ z=(a^2-(u^1)^2)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

$$(a=\text{const}>0,\ -a\leqslant u^1<a,\ 0\leqslant u^2<2\pi)$$

证明该曲面的切平面在三个坐标轴上所截得的各线段之长的平方和是定数。

1694. 直线g在空间里移动，并使下列三个条件成立：

（1）直线g与轴(Oz)交成直角；

（2）点$g\cap(Oz)$以速度v匀速运动；

（3）直线g以角速度ω绕轴(Oz)匀速转动。

写出直线g这样移动时所画出的曲面之方程（该曲面叫作正螺旋面或简单螺旋面）。

1695. 已知正螺旋面：

$$\begin{cases} x=u^1\cos u^2, \\ y=u^1\sin u^2, \\ z=au^2. \end{cases}$$

写出该螺旋面在点$(u^1,\ u^2)$处的切面和法线方程。

1696. 证明：曲线γ所成切线曲面的每一条母线上的所有点（脊线上的点除外）处有相同的切平面。

1697. 在曲面Φ的各法线正（负）向一端截取定长线段。所截得的诸线段的端点形成一曲面Φ'《平行》曲面Φ．证明二曲面

Φ和Φ′在对应点处有公法线。

1698．证明：下列各曲面

$$x^2+y^2+z^2=ax,$$
$$x^2+y^2+z^2=by,$$
$$x^2+y^2+z^2=cz.$$

两两相交成直角（将两曲面Φ_1和Φ_2在点

$$M\in\Phi_1\cap\Phi_2$$

处两切平面之间夹角称作两曲面Φ_1和Φ_2在点M处的夹角）。

1699．证明：平移曲面

$$\vec{R}=\vec{r}(u^1)+\vec{\rho}(u^2)$$

沿每条平移曲线（$u^1=\text{const}$和$u^2=\text{const}$）的切平面平行于某一直线。

1700．证明：如果一曲面的全部法线都与某一直线相交，则这个曲面是旋转曲面。

1701．证明：如果一曲面的诸法线都通过同一点，则该曲面位于某球面上。

1702．证明：在这样一些点$(a,\ -a,\ 0)$处与曲面

$$z=x^3+y^3$$

相切的全部平面属于同一面束。

§2 曲面的第一基本二次形式

1703．求球面

$$\begin{cases} x=r\cos u^1\cos u^2, \\ y=r\sin u^1\cos u^2, \\ z=r\sin u^2 \end{cases}$$

的第一基本二次形式。

1704．求正螺旋面

$$\begin{cases} x=u^1\cos u^2, \\ y=u^1\sin u^2, \\ z=au^2 \end{cases}$$

的第一基本二次形式。

1705. 求曲面

$$z=f(x,\ y)$$

的第一基本二次形式。

1706. 证明旋转曲面经参数化，能使它的第一基本二次形式呈如下形式：

$$ds^2=(du^1)^2+G(u^1)(du^2)^2.$$

1707. 把一曲面上的曲线网称作是**切贝雪夫**(Чебышев)**网**，如果每一族曲线被另一族二曲线所截得的曲线段都等长。证明：

(a) 曲面上的坐标曲线网是切贝雪夫网，当且仅当

$$\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial\gamma_{22}}{\partial u^1}=0.$$

(b) 在平移曲面

$$\vec{R}=\vec{r}(u^1)+\vec{\rho}(u^2)$$

上的坐标曲线构成切贝雪夫网。

1708. 证明：在正螺旋面

$$\begin{cases} x=u^1\cos u^2,\\ y=u^1\sin u^2,\\ z=au^2 \end{cases}$$

上，微分方程

$$(du^1)^2-((u^1)^2+a^2)(du^2)^2=0$$

确定一正交网。

1709. 已知正螺旋面：

$$\begin{cases} x=u^1\cos u^2,\\ y=u^1\sin u^2,\\ z=au^2. \end{cases}$$

求该螺旋面上坐标曲线间夹角之平分曲线方程。

1710. 在曲面

$$\begin{cases} x=(u^1)^2+(u^2)^2,\\ y=(u^1)^2-(u^2)^2,\\ z=u^1u^2 \end{cases}$$

上，计算曲线

$$u^2=au^1$$

与另两条曲线

$$u^1=1,\quad u^1=2$$

的两个交点间的弧长。

1711. 给出曲面第一基本二次形式：

$$dS^2=(du^1)^2+((u^1)^2+a^2)(du^2)^2.$$

求由下列三条曲线

$$u^1=\pm\frac{1}{2}a(u^2)^2,\quad u^2=1$$

相交而成的曲边三角形的周长。

1712. 在具有第一基本二次形式

$$dS^2=(du^1)^2+\operatorname{sh}u^1(du^2)^2$$

的曲面上，求曲线

$$u^1=u^2$$

在二点 $M_1(u_1^1,\ u_1^2)$，$M_2(u_2^1,\ u_2^2)$ 间的弧长。

1713. 在曲面

$$\begin{cases}x=u^1\cos u^2,\\ y=u^1\sin u^2,\\ z=(u^1)^2\end{cases}$$

上，求两曲线

$$u^2=u^1+1\quad 和 u^2=3-u^1$$

之间的交角。

1714. 在正螺旋面

$$\begin{cases}x=u^1\cos u^2,\\ y=u^1\sin u^2,\\ z=au^2\end{cases}$$

上，求两曲线

$$u^1+u^2=0\quad 和 u^1-u^2=0$$

之间的交角。

1715. 求在1711题中所指出的曲边三角形的各内角。

1716. 在具有第一基本二次形式

$$dS^2=(du^1)^2+((u^1)^2+a^2)(du^2)^2$$

的曲面上，求由三条曲线

$$u^1=\pm au^2,\quad u^2=1$$

相交而形成的三角形的面积。

1717. 在正螺旋面

$$\begin{cases}x=u^1\cos u^2,\\ y=u^1\sin u^2,\\ z=au^2\end{cases}$$

上，求由四条曲线

$$u^1=0,\quad u^1=a,\quad u^2=0,\quad u^2=1$$

所围成的四角形的面积。

1718. 证明：下列每个曲面都与平面贴合：

（1）柱面；

（2）锥面；

（3）由光滑曲线的切线形成的曲面。

1719. 称一曲面是可展的，如果它能与平面贴合。证明：除1718题中所指出的可展曲面外，不存在其它可展曲面。

1720. 证明：如果一曲面能够作这样的参数化，使它的第一基本二次形式的各个系数是定值，则该曲面与平面局部保距。

1721. 证明：球面就连局部也不和平面保距。

1722. 证明：平面到自身的保距映射是运动。

1723. 给出正螺面

$$\begin{cases}x=u^1\cos u^2,\\ y=u^1\sin u^2,\\ z=au^2, & 0\leqslant u^2<2\pi\end{cases}$$

及悬链面

$$\begin{cases}x=v^1\cos v^2,\\ y=v^1\sin v^2,\\ z=a\operatorname{arch}\dfrac{v^1}{a}.\end{cases}$$

证明：存在正螺面到悬链面的局部保距映射，它使正螺面的直母线变成悬链面的子午线。

1724．设Φ_1，Φ_2是二光滑曲面。把可微同胚

$$h: \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2$$

叫作**保角映射**，如果它保持两曲线间的夹角不变。设

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1, u^2) \text{ 和 } \vec{\rho}=\vec{\rho}(v^1, v^2)$$

分别是二曲面Φ_1和Φ_2的参数化方程。证明：

（1）如果曲面Φ_1和Φ_2的第一基本二次形式的各参数化系数成比例，则按规则

$$v^1=u^1, \quad v^2=u^2$$

的映射

$$h: \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2$$

是保角的；

（2）反之，如果按规则

$$v^1=u^1, \quad v^2=u^2$$

的映射

$$h: \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2$$

是保角的，则两曲面的第一基本二次形式的系数成比例。

1725．设Φ_1和Φ_2是二光滑曲面。把可微同胚

$$f: \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2$$

叫作**保面映射**，如果它保持可测图形的面积。证明：如果映射

$$f: \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2$$

保角且保面，则它是保距的。

1726．证明：曲面上的每条直线都是**测地线（短程线）**。

1727．证明：曲面

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1, u^2)$$

的测地线微分方程可以写成

$$(\vec{N}, \ d\vec{r}, \ d^2\vec{r})=0$$

的形式，其中$\vec{N}$是曲面的法向量。

1728．证明：旋转曲面的经线是测地线；而纬线是测地线，

当且仅当在它的各点处向经线引的诸切线平行于旋转轴。

1729．已知半径为 R 的球面，在其上求半径为 r 的圆之测地曲率。

1730．在正螺旋面

$$\begin{cases} x = u^1 \cos u^2, \\ y = u^1 \sin u^2, \\ z = a u^2 \end{cases}$$

上，求在它上面的螺旋线

$$u^1 = C = \text{const}$$

的测地曲率。

§3 曲面的第二基本二次形式

1731．证明：平面的第二基本二次形式恒等于零。球面的第二基本二次形式和它的第一基本二次形式成比例。

1732．求悬链面

$$\begin{cases} x = \sqrt{(u^1)^2 + a^2} \cos u^2, \\ y = \sqrt{(u^1)^2 + a^2} \sin u^2, \\ z = a \ln(u^1 + \sqrt{(u^1)^2 + a^2}) \end{cases}$$

的第二基本二次形式。

1733．求曲面

$$\begin{cases} x = \cos u^2 - (u^1 + u^2) \sin u^2, \\ y = \sin u^2 + (u^1 + u^2) \cos u^2, \\ z = u^1 + 2u^2 \end{cases}$$

的主曲率。

1734．求正螺旋面

$$\begin{cases} x = u^1 \cos u^2, \\ y = u^1 \sin u^2, \\ z = a u^2 \end{cases}$$

的主曲率。

1735. 证明：正螺旋面的主方向（参看1534题）平分母线方向与螺旋线方向间的夹角。

1736. 求抛物面

$$z=axy$$

的曲率线。

1737. 证明：在平面上和球面上的任何曲线都是曲率线。

1738. 证明：只有沿着曲面法线的曲率线才能形成可展曲面。

1739. 设对光滑曲面引进了**等温坐标**（于是第一基本二次形式呈

$$dS^2=\lambda\left((du^1)^2+(du^2)^2\right)$$

形式）。计算曲面在点(u^1, u^2)处的全曲率。

1740. 设对光滑曲面引进了半测地坐标（于是第一基本二次形式呈

$$dS^2=(du^1)^2+\gamma_{22}(du^2)^2$$

形式）。计算曲面在点(u^1, u^2)处的全曲率。

1741. 设光滑曲面上的坐标曲线组成切贝雪夫网。证明：

(a) 曲面的第一基本二次形式能化成

$$dS^2=(du^1)^2+2\cos\omega du^1du^2+(du^2)^2;$$

(b) 曲面的全曲率

$$K=-\frac{\omega_{12}}{\sin\omega}，\text{其中}\ \omega_{12}=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^1\partial u^2}.$$

1742. 求正螺旋面

$$\begin{cases} x=u^1\cos u^2, \\ y=u^1\sin u^2, \\ z=au^2 \end{cases}$$

在点(u^1, u^2)处的全曲率和中曲率。

1743. 证明：如果曲面在每一点处的中曲率等于零。则渐近网是正交的。

1744. 已知一曲面的中曲率H是定值。在它的所有法线的正

（负）向，截取长等于$\frac{1}{2H}$的线段。证明：这些线段的诸端点组成的曲面（平行于已知曲面）具有定常全曲率。

1745. 设曲面 Φ' 平行于曲面Φ。证明：曲面Φ'的曲率线与曲面Φ的曲率线相对应。

附录 平面几何计算题

§1 三角形

1746. 在等腰直角三角形 ABC 中，($\hat{C}=90°$) 引两条中线〔AA_1〕和〔BB_1〕.计算这两条中线夹角的余弦。

1747. 正三角形 ABC 的边长等于 a .将三角形绕其中心旋转角φ，而将该三角形变成三角形$A_1B_1C_1$.计算这两个三角形之交的面积。

1748. 已知边长为 a 的正三角形及边上一点 M .计算该点到各边距离之和。

1749. 如果已知三角形之垂心是其中一高线的中点，求此三角形三个角的量度间的相依关系。

1750. 在等腰三角形里，向一腰所引高线之长等于该边长之半。计算该三角形的各角。

1751. 求三角形 ABC 各边长之间的相依关系，如果其两条中线〔AA_1〕和〔BB_1〕之夹角等于60°.

1752. 已知三角形 ABC,点 C_1 是顶点 C 在直线 (AB) 上的射影。求三角形边长之间的相依关系,如果 $|CC_1|^2=|C_1A|\cdot|C_1B|$.

1753. 求三角形 ABC 各角之间的相依关系，如果从其外接圆之圆心看其角平分线〔CC_1〕的视角成直角。

1754. 已知一等腰三角形内接于半径为 R 的圆。向它的一腰引的高线长能取得的最大值是多少？此时三角形的顶角值是多少？

1755. 已知顶角 C 为100° 的等腰三角形 ABC. 过顶点 A 和 B 引射线(AM) 和(BM) ($M\in\triangle ABC$)，使

$$\widehat{MAB}=30°, \quad \widehat{MBA}=20°.$$

计算角 ACM 的值。

1756. 已知两条相等线段 $[AB]$ 和 $[A_1B_1]$. 两条直线 (AB) 和 (A_1B_1) 之间应成何角，才能使两条线段 $[AB]$ 和 $[A_1B_1]$ 的两个中点 M 与 N 之间的距离等于 $\frac{1}{2}|AB|$？

1757. 自内接于一圆的三角形 ABC 的两顶点 A 和 B 所作的两条切线交于点 S. 直线 (CS) 交 (AB) 于点 M. 如果已知三角形的各边长，计算比值 $|AM|:|MB|$.

1758. 在三角形 ABC 内引两条高线 $[AH_1]$ 和 $[BH_2]$. 计算三角形的角 C 值，如果 $\widehat{H_1MH_2}=90°$，其中点 M 是边 $[AB]$ 的中点。

1759. 求三角形 ABC 各边之间的相依关系，如果已知它的中线 $[AA_1]$、高线 $[BB_1]$、角平分线 $[CC_1]$ 相交于一点。

1760. 已知顶角为30°的等腰三角形 ABC ($|AB|=|BC|$). 在边 $[BC]$ 上取点 D，使

$$|AC|:|BD|=\sqrt{2}.$$

求角 DAC 的值。

1761. 过直角三角形 ABC 的两个锐角顶点 A 和 B，引和两条直角边交于点 A_1 和 B_1 的两条射线。设 D 是两射线的交点。计算三角形 A_1B_1D 的各角，如果

$$\widehat{A_1AC}=\frac{1}{3}\hat{A},\quad \widehat{B_1BC}=\frac{1}{3}\hat{B}.$$

1762. 一直角三角形的斜边长等于1，而中线之交点位于它的内切圆内。计算三角形的周长。

1763. 求等腰三角形的各角，其中它的底边之长等于 p，而腰长等于 q，如果

$$p^3-3pq^2+q^3\sqrt{3}=0.$$

1764. 已知三角形 ABC 顶角 A 的值，求底边 $[BC]$ 处二内底角之平分线所夹锐角的值。

1765. 已知三角形 ABC 的底边 $[BC]$ 处两顶角的值，求顶角 A 处的角平分线和高线间夹角的值。

1766. 已知直角三角形各角的值，求由直角顶引之高线与中线间夹角的值。

1767. 已知三角形 ABC 各边之长分别等于 a、b、c. 从顶点 A 引边 $[BC]$ 之中线 $[AM]$、高线 $[AH]$ 和三角形的一个角 BAC 的平分线 $[AK]$. 求比 $[MH, K]$ 的值。

1768. 求三角形 ABC 的一个角 BAC 之平分线的长，如果

$$|AB|=c,\quad |AC|=b,\quad \widehat{BAC}=\hat{A}.$$

1769. 在三角形 ABC 中已知:

$$|AB|=c,\quad |AC|=b \text{ 和 } m_a=\sqrt{bc},$$

其中 m_a 是边 $[BC]$ 的中线。求角 BAC 的值。

1770. 在三角形 ABC 中已知: $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|AD|$ 是三角形一角 BAC 的平分线, $|BD|=c'$, $|CD|=b'$. 计算 $|AD|$.

1771. 求三角形的面积，如果已知它的两边长为 b 与 c 和该两边夹角之平分线 t.

1772. 点 M 在三角形的内部。该点到三角形各边所在直线的距离等于 x、y、z, 而与三角形各边相对应的诸高线长分别为 h_1、h_2、h_3. 计算各值之和:

$$\frac{x}{h_1}+\frac{y}{h_2}+\frac{z}{h_3}.$$

1773. 在三角形 ABC 的各边 $[BC]$、$[CA]$、$[AB]$ 上依次取点 P、Q、R, 使

$$(BC,\ P)=\alpha,\quad (CA,\ Q)=\beta,\quad (AB,\ R)=\gamma.$$

求三角形 PQR 的面积与三角形 ABC 的面积之比。

1774. 已知三角形 ABC 各角的值，求由顶点 A 所引之中线和高线间的夹角值。

1775. 一直线平行于面积为 S 的三角形之底，截取它得到一个面积为 S' 的三角形。一四边形的三顶点与小三角形的三顶点重合，而第四顶点属于大三角形之底，求该四边形的面积。

1776. 已知三角形之三高线之长为 h_1、h_2、h_3, 求它的面积。

1777. 已知三角形三中线之长 m_a, m_b, m_c，求它的面积.

1778. 已知三角形 ABC 各边之长 a, b, c.求其内切圆半径 r 和切于边 $[BC]$ 的旁切圆的半径 r_a.

1779. 已知三角形各边之长 a, b, c，求其外接圆的半径。

1780. 计算三角形的面积，已知其内切圆的半径 r 和旁切圆的半径 r_a, r_b, r_c.

1781. 已知三角形 ABC.求其内切、外接和旁切圆各半径之间的相依关系.

1782. 已知三条平行直线 d_1, d_2, d_3(不同的)，并且 d_2 在两条直线 d_1, d_3 所限定的带形之内。设

$$\rho(d_1,d_2)=a,\ \rho(d_2,d_3)=b.$$

计算各顶点都在已知三直线上的正三角形之面积。

1783. 三角形 ABC 的各边按下列比值分割:

$$(BC,P)=\alpha,\ (CA,Q)=\beta,\ (AB,R)=\gamma.$$

又 (AP), (BQ), (CR) 三线段围成三角形 $A'B'C'$.求三角形 $A'B'C'$ 的面积与三角形 ABC 的面积之比。

1784. 一直角三角形的面积等于 6 平方单位，而与其一直角边相切的旁切圆之半径等于 3 .求三角形各边之长。

1785. 求一直角三角形各角的值，已知它的外接圆半径与内切圆半径之比为5:2.

1786. 过正三角形一边之中点，引一条直线与此边成 α 角 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. 该直线分三角形面积之比是多少?

1787. 在三角形 ABC 里已知

$$\hat{A}=2\hat{B},\ |AC|=b,\ |AB|=c.$$

求 $|BC|$.

1788. 三角形 ABC 各边之长为13,14,15.一条直线 (XY) 垂直于较大的边并将它分成相等的两部分. 求线段

$$(XY)\cap\triangle ABC$$

的长。

1789．一个正三角形内接于边长等于 3 的正三角形，且其面积是已知正三角形面积的三分之一。求这两个三角形相邻顶点间的距离。

1790．已知三角形 ABC 各边之长为 a,b,c，求三角形的一个角 BAC 之平分线的长。

1791．已知三角形 ABC 各边的长为

$$|AB|=c,\quad |AC|=b,\quad |BC|=a.$$

求点 B 和点 C 到角 BAC 之平分线所在直线的距离。

1792．已知三角形各边之长为36，29和25．较大一边的中点 M 在两腰的正射影为点 N 和 K．求三角形 MNK 的面积。

1793．已知三角形 ABC 的各边之长：

$$|BC|=a,\quad |AC|=b,\quad |AB|=c.$$

三角形内部的一点 M 在直线 (BC)，(AC)，(AB) 上的正射影分别为 M_1、M_2、M_3．并且

$$|MM_1|=p_1,\quad |MM_2|=p_2,\quad |MM_3|=p_3.$$

求三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积。

1794．已知三角形的各边之长等于 a,b,c．求该三角形之垂足三角形的周长。

1795．过三角形内部一点，引平行于它的各边的直线。这三条直线将三角形分成六个部分，其中三个三角形的面积分别是 S_1,S_2,S_3．求已知三角形的面积。

1796．将一等腰直角三角形 ABC，绕其一直角边的中点转角 45°，它变成三角形 $A'B'C'$．求图形 $\triangle A'B'C'\cap\triangle ABC$ 的面积与三角形 ABC 的面积之比。

1797．一直角边长为 a 的等腰直角三角形 ABC，将它绕直角顶转角 30° 后，变成三角形 $A'B'C'$．求图形

$$\triangle A'B'C'\cap\triangle ABC$$

的面积。

1798．已知三角形各边之长为 a,b,c，计算以该三角形各角平分线与底边交点为顶点的三角形之面积。

1799．已知边长为a,b,c的三角形。重心在各边所在直线上的正射影分别为G_1，G_2，G_3．求三角形$G_1G_2G_3$的面积。

§2 多边形

1800．已知一平行四边形，它的各边与它的各条对角线成比例。计算比例系数。

1801．一正五边形的边长为a．计算该五边形的顶点到对边中点的距离。

1802．一矩形内接于边长为a的正方形，矩形的顶点在正方形的各边上。计算该矩形对角线的长，如果它的面积等于S．

1803．已知凸四边形$ABCD$．在边$[AB]$和$[CD]$上分别作出点M和N，使

$$|AB|:|MB|=|CD|:|ND|=k.$$

计算四边形$AMCN$的面积与已知四边形的面积之比。

1804．在梯形$ABCD$里，作平行于长为a和b的二底边$[AB]$及$[CD]$的两条线段、并且该两线段的端点在梯形的两腰上。计算这两条线段的长，如果它们把梯形分成三个相等的部分。

1805．正六边形$ABCDEF$的边长等于a．计算距离$|AM|$，其中M是边$[CD]$的中点。

1806．在一平面上已知正n边形及在该面上的任一点P．如果n边形外接圆的半径等于R，而点P到该圆中心的距离等于d，求点P到正n边形各边所在直线之距离的平方和。

1807．已知边长为a的正六边形$ABCDEF$．点M和N分别是两边$[BC]$和$[CD]$的中点。计算点M到线段$[AN]$中点P的距离。

1808．已知平行四边形$ABCD$．用三角形ABC外接圆的半径R和它的边长，表出三角形ABC外接圆之圆心到顶点D的距离。

1809．计算四边形$ABCD$的各角，如果

$\widehat{CAB}=30°$，$\widehat{DBC}=30°$，$\widehat{AC}$ $=45°$，$\widehat{BDA}=45°$．

1810．过一正方形两个相邻顶点的圆之半径为R．计算正方

形的边长，如果圆心到正方形中心的距离等于d.

1811．凸六边形 $ABCDEF$ 的诸对边两两平行且相等。三角形ACE 的面积是六边形面积的怎样的一部分？

1812．在已知凸四边形内求作一点，使它到四边形各顶点距离之和是最大的。

1813．已知一梯形两底边之长为 a 与 b．求连接它的两对角线中点之线段的长($a>b$)．

1814．已知一梯形两底之长为 a 和 b，求过对角线的交点、平行于底边并且端点在梯形的两腰上的线段之长。

1815．已知一梯形两底边之长为 a 和 b ($a>b$)，一线段过两腰延长线的交点且平行于底边、而其端点在两对角线的延长线上，求该线段之长。

1816．线段$[AB]$和$[CD]$是梯形$ABCD$的两底边。求梯形两对角线的长和两边的长之间的相依关系。

1817．$ABCD$ 是平行四边形，P 是$[AB]$的中点，Q 是$[BC]$的中点，R是$[DC]$的中点，S是$[AD]$的中点。由二直线 (AQ)和(SC)所限定的带形和由二直线(DP)和(BR) 所限定的带形相交成平行四边形。求此平行四边形的面积与已知平行四边形的面积之比。

1818．一梯形的两对角线把梯形分成四个部分。已知邻接两底边的两部分的面积S_1，S_2，求此梯形的面积。

1819．计算半径为$R=1$的圆之诸弦长的平方和，这些弦的一个端点是圆上的任一点，而另一端点是内接于该圆的正五边形的各顶点。

1820．设A，B，C，D是一正七边形相邻的四个顶点。求$|AB|$，$|AC|$和$|AD|$之间的相依关系。

1821．安置两个正方形薄片，使其中心重合而各条对角线间的夹角都等于 α．求这样形成的八卦星形的周长和面积。设薄片的边长都等于 a．

1822．已知一等腰梯形的各边之长：两底边为 7cm 及 1cm、

而二腰均为5cm．求外接圆的面积。

1823．两个正多边形具有等长的边，而其中一个的内角是另一个的内角的二倍。求这两多边形的面积之比。

1824．已知边数为n和$2n$的正内接多边形的面积S_1和S_2，求内接正$4n$边形的面积。

1825．一边长为a的正六边形F，被过其一个顶点的直线d分成两部分，它们的面积之比是2:3．求线段d自F的长。

1826．在已给定面积的三角形的各边上作三个正方形。试问该三个正方形的面积之和何时最小？

1827．已知三角形各边之长是：52，56，60．引一条平行于大边的割线，使所截得的梯形周长等于156．求该梯形的面积。

1828．求一等腰梯形的面积，它的对角线互相垂直，而其高线的长等于h．

1829．过梯形对角线的交点且平行于其底边的一条直线，将梯形分成两部分。求这两部分的面积之比，如果梯形二底之长为a和b．

1830．已知梯形$ABCD$的二底之长：

$$|AB|=a, \quad |DC|=b \ (a>b).$$

在小底的延长线上求一点M，使直线(AM)将梯形分成两个相等部分。

§3　圆周和圆

1831．一梯形内接于半径为R的半圆，该梯形还能画出一内切圆。计算其内切圆的半径r．

1832．点M和N是两个相交于点A和B的二圆的位似中心。求角MAN的值。

1833．三角形ABC内接于圆心为O的圆，如果其中线$|CC_1|$垂直于半径$|OC|$，求三角形ABC各边的相依关系。

1834．二圆相交于点A和B，它们的一条公切线与它们相切

于点M和N，求和角：

$$\widehat{MAN}+\widehat{MBN}.$$

1835．一正n边形$A_1A_2\cdots A_n$内接于半径为R的圆。计算和

$$\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2,$$

其中M是圆上的一个点。

1836．已知两个同心圆。作一正方形，使它的一对相邻顶点属于一个圆，而另一对相邻顶点属于另一个圆。试用两已知圆的半径r_1、r_2表示该正方形的面积。

1837．三角形ABC内接于一圆，已知三角形的面积S、圆的半径R．计算三角形ABC的高线$|AA_1|$在点C处圆的切线上的射影。

1838．设点P是等腰三角形外接圆上的任意一点。计算下列各和：

$$S_1=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2;$$

$$S_2=|PA|^4+|PB|^4+|PC|^4.$$

如果$|AB|=a$，

1839．在一平面上已知半径为R的圆和一点P，设$ABCD$是已知圆的内接正方形。计算和：

$$|PA|^4+|PB|^4+|PC|^4+|PD|^4.$$

1840．已知半径为R的圆之两弦长分别为a和b．求连接两给定弦之端点的两弧之和所对应的弦长。

1841．设半径等于a和b的两个圆相交。它们的圆心距等于c．求与已知两圆及它们的切线都相切的圆之半径。

1842．一半径为R的直角扇形，被以相同半径、以扇形弧的端点为圆心的一圆分成两个部分。求其中较小部分的内切圆之半径。

1843．三个圆的半径都是r．计算由三个圆两两相交成直角的圆弧所围成的曲边三角形的面积。

1844．半径为r的一圆与三个合同的且两两相切的圆相外

切。求由以上诸圆所围成的三个曲边三角形的面积。

1845．安置半径为R的两个相交的圆*，使其中每一个的圆心都位于另一个圆上。求与两圆公共部分内切并与它们的圆心线相切的圆之半径。

1846．已知半径为r的圆的弓形，如果连接弓形弦两端的弧为α度，求该弓形内接正方形的边长。

1847．设四个圆的圆心位于边长为a的正方形的四个顶点上。而四个圆的半径都等于a，求四个圆公共部分的面积。

1848．一个圆的三个圆弧的三条弦长分别为$2a$，$2a$，$2b$，且三个圆弧之和正好构成半圆。求该圆的半径。

1849．半径分别为R和r的两圆相外切。求与两圆及它们之外公切线相切的圆的半径。

1850．半径分别为R_1，R_2，R_3的三个圆两两相外切。求过三切点的圆之半径。

1851．半径分别为R和r的两个圆相交成直角。求它们公切线的长。

1852．设

$$C\in[AB],\quad |AC|=2a,\quad |BC|=2b,\quad a\neq b.$$

在直线(AB)所限定的同一半平面上，以线段$[AB]$，$[AC]$，$[CB]$为直径作三个半圆。求与所作的三个半圆都相切的圆之半径。

1853．半径分别为R_1，R_2，R_3的三个圆两两相外切。求前两个圆之内公切线被第三个圆所截得的弦长。

1854．过正方形相邻二顶点作一圆，使从第三个顶点向它所引的切线长等于该正方形边长的二倍。求这个圆的半径，如果正方形的面积等于10个平方单位。

1855．半径$R=2$的圆与半径$r=\dfrac{2}{3}$的圆相内切。求与已知二圆及它们的圆心线相切的圆的半径。

---

* “两个相交”原文无——译者注

1856．半径为R及$\frac{R}{4}$的二圆内切于点A.过大圆之圆心作与小圆相切的直径〔BC〕.求三角形ABC的面积。

1857．半径为R及r的二圆相外切。求二圆之切点到外公切线的距离。

1858．半径为R及r的二圆外切于点C，作它们的外公切线（AB），其中A和B是切点。求三角形ABC的各边之长。

1859．以半径为r的圆的直径作一正三角形。求此正三角形在圆外那部分的面积。

1860．已知边长为a，b，c的三角形。作一个与三角形的前两边相切而圆心在第三边上的圆。求该圆的半径。

1861．一圆与直角三角形之长直角边相切、并且过其所对锐角的顶点，而圆心在斜边上。求此圆的半径，如果已知两直角边的长分别为3和4．

1862．一圆内切于两底长分别为8和2的等腰梯形。求圆的半径。

1863．半径为r的二相交圆之圆心距等于r．一正方形内接于二圆之公共部分（正方形的各顶点在二圆公共部分的边界上）。求该正方形的边长。

解题指导和答案

解题指导和答案

4 不是。

6．$\vec{b}=-\frac{5}{3}\vec{a}$.

9．$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，或$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$．其中$O$是任意点；或者$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

13．利用对称的合成是平移。

14．用$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$，$\vec{D}$表示点向量$\vec{M}$，$\vec{N}$，$\vec{K}$，$\vec{L}$，再注意到$MNKL$是平行四边形，即有

$$\vec{M}+\vec{K}=\vec{N}+\vec{L},$$

证明：

$$\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{D}.$$

当$\lambda=1$时，命题不真。

15．（1）$\vec{a}\perp\vec{b}$；（2）$\vec{a}\|\vec{a}$；（3）$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$；

（4）$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$；（5）$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$；（6）$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

20．参看习题7和19。

24．$\overrightarrow{OM}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\cdots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$

（就n应用归纳法）

29．利用向量$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AB}$的同向性条件。

30．（1）$\alpha+\beta=1$，（2）$\alpha+\beta=1$，$\alpha\geqslant0$，

（3）$\alpha+\beta=1$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$.

31．用向量$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}$表示向量$\overrightarrow{MN}$.

32．如果点A_1，A_2，A_3，A_4属于一条直线，可参看习题28．设至少有三点A_1，A_2，A_3不属于一条直线，即向量$\overrightarrow{A_1A_2}$和$\overrightarrow{A_1A_3}$不共线。如果点A_1，A_2，A_3，A_4属于一平面，则

$$\overrightarrow{A_1A_4}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}+\mu\overrightarrow{A_1A_3},$$

或 $\overrightarrow{PA_4}-\overrightarrow{PA_1}=\lambda(\overrightarrow{PA_2}-\overrightarrow{PA_1})+\mu(\overrightarrow{PA_3}-\overrightarrow{PA_1})$，

因此 $(\lambda+\mu-1)\overrightarrow{PA_1}-\lambda\overrightarrow{PA_2}-\mu\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{O}$.

记 $\alpha_1=\lambda+\mu-1$，$\alpha_2=-\lambda$，$\alpha_3=-\mu$，$\alpha_4=1$，

得到：$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$.

反之：设

$$\alpha_1\overrightarrow{PA_1}+\alpha_2\overrightarrow{PA_2}+\alpha_3\overrightarrow{PA_3}+\alpha_4\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{O},$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\text{，而 }\alpha_4\neq 0.$$

于是

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{O},$$

$$\overrightarrow{PA_4}-\overrightarrow{PA_1}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_3}-\overrightarrow{PA_1},$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_3}-\frac{\alpha_1+\alpha_4}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1}$$

$$=-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_3}+\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1}$$

$$=-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{A_1A_2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{A_1A_3}.$$

所以$\overrightarrow{A_1A_4}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}+\mu\overrightarrow{A_1A_3}$，由此得出诸点

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

属于一平面。

34．取顶点C作始点。$\vec{G}=\dfrac{\vec{B}+\mu\vec{B_1}}{1+\mu}$，$\vec{G}=\dfrac{\vec{A}+\lambda\vec{A_1}}{1+\lambda}$.

要证明：

$$\lambda+\mu=1$$

只须由这两个等式表出$\vec{A_1}$和$\vec{B_1}$并再注意到

$$\vec{G}=\frac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B})\text{，}\vec{A_1}=k\vec{B_1}.$$

36．设$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.于是

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{\vec{b}+\lambda_1\vec{c}}{1+\lambda_1},\quad \overrightarrow{AB_1}=\frac{\vec{c}}{1+\lambda_2},\quad \overrightarrow{AC_1}=\frac{\lambda_3\vec{b}}{1+\lambda_3}.$$

注意到梅涅劳定理：

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1,$$

再把所给向量用$\vec{b}$，$\vec{c}$及λ_1，λ_2表出，并证明所得到的分解式的系数成比例。

38. 参看习题37.

39. 取两个三角形的公共重心作始点。于是

$$\vec{A_1}+\vec{A_2}+\vec{A_3}=\vec{O}, \qquad (1)$$

$$\vec{B_1}+\vec{B_2}+\vec{B_3}=\vec{O}, \qquad (2)$$

根据三点共线条件有：

$$\vec{B_1}=k_1\vec{A_2}+(1-k_1)\vec{A_3},$$

$$\vec{B_2}=k_2\vec{A_3}+(1-k_2)\vec{A_1},$$

$$\vec{B_3}=k_3\vec{A_1}+(1-k_3)\vec{A_2}.$$

利用等式（2）得到：

$$\vec{A_3}=\frac{1-k_1+k_3}{k_1-k_2-1}\vec{A_1}+\frac{1+k_1-k_3}{k_1-k_2-1}\vec{A_2}.$$

但根据等式(1)有：

$$\vec{A_3}=-\vec{A_1}-\vec{A_2}.$$

考虑到向量$\vec{A_1}$和$\vec{A_2}$不共线，在二分解式中使$\vec{A_1}$和$\vec{A_2}$的系数相等，我们得到

$$k_1=k_2=k_3.$$

45. (1) $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{k}{k+1},\ \frac{1}{k+1}\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{1}{k+1},-\frac{1}{k+1}\right)$.

46. $\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$，其中

$$b=|AC|,\quad c=|AB|.$$

47. $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.

48. $\vec{m}=2\vec{n}-\vec{p}$.

49. (1) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, (2) (4, 5).

51. $\overrightarrow{AB}(2, 1)$, $\overrightarrow{BC}(-1, 1)$, $\overrightarrow{AC}(1, 2)$, $\overrightarrow{AM}(1,1)$.

53. $\overrightarrow{A_1B_1}(1, -1, 0)$, $\overrightarrow{DD_1}(-2, 2, -2)$, $\overrightarrow{AP}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

57. 设 $[CD]\cap[AB]=M$. 于是 $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}$, $|\overrightarrow{OM}|=|k|R$, 其中 R 是三角形 ABC 外接圆的半径。因为 $\widehat{COB}=2\hat{A}$, $k=-\cos 2\hat{A}$ (考虑到向量 $\overrightarrow{OM}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ 的方向)。因而有

$$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}-(2\cos 2\hat{A})\cdot\overrightarrow{OA}.$$

58. $\vec{c}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

59. (2) $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{MA}+\frac{1+\lambda}{\lambda}\overrightarrow{MC}$;

(3) $\overrightarrow{AB}=-\frac{1+\lambda}{\lambda}\overrightarrow{MA}+\frac{1+\lambda}{\lambda}\overrightarrow{MC}$.

60. (0, −1, −1).

61. $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

62. $\overrightarrow{MB}\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{SP}\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AP}\left(-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

64. $\cos\widehat{ABC}=-\frac{2}{3}$.

65. (1)否;(2)是;(3)否;(4)是;(5)否。

66. 平行四边形二对角线长的平方差等于二邻边与其夹角余弦之积的四倍。

67. 射影$_{\vec{a}}\vec{b}$ = 射影$_{\vec{a}}\vec{c}$.

70. $\sqrt{133}$; 7.

76. $\frac{\pi}{3}$.

77. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{\pi}{3}$; (3) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

78. $\arccos\frac{4}{5}$.

79. $\overrightarrow{BB_1}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC}^2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

80. $(a_2, -a_1)$, $(-a_2, a_1)$.

82. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

83. 参看习题58.

84. (2) $CD^2=\frac{b^2+\lambda a^2}{1+\lambda}-\frac{\lambda c}{(1+\lambda)^2}$;

(4) (a) $\frac{2}{b+a}\sqrt{bcp(p-a)}$，其中

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c);$$

(b) $\frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$，假定 $b>c$;

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

85. 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是已给的 n 边形及 M_0 是它的一内点。过点 M_0 所引的垂线足，不是线段 $[A_1A_2]$ 的内点，当且仅当 $\overrightarrow{A_1M_0}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\leqslant 0$. 此时

$$|M_0A_2|>|M_0A_1|.$$

假设（与习题断言相反）对 n 边形的任意边都有：

$$\overrightarrow{A_iM_0}\cdot\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\leqslant 0.$$

于是得出：

$$|M_0A_1|<|M_1A_2|<|M_0A_3|<\cdots<|M_0A_n|<|M_0A_1|.$$

引出矛盾：

$$|M_0A_1|<|M_0A_1|.$$

此矛盾证明了后一假设是不对的。

86. 作出等式

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_1}=\overrightarrow{O}$$

与向量 $\overrightarrow{A_nA_1}$ 的单位向量 $\vec{a}_0$，或与向量 $\vec{a}_0$ 的正交单位向量 $\vec{b}_0$ 的数量积。

87. 设 $(AB)\perp\Sigma$，$B\in\Sigma$. 取点 A 作始点。根据条件有：

$$\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}=d^2,\quad \overrightarrow{X}=k\overrightarrow{Y},(\overrightarrow{X}-\overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{B}=0.$$

消去 k 和 $\overrightarrow{X}$，得到方程

$$\overrightarrow{Y}^2-\frac{d^2}{\overrightarrow{B}^2}\overrightarrow{Y}\cdot\overrightarrow{B}=0,$$

它能化成：

$$\left(\overrightarrow{Y}-\frac{d^2}{2\overrightarrow{B}^2}\cdot\overrightarrow{B}\right)^2=\frac{d^4}{4\overrightarrow{B}^2}.$$

所得到的方程确定一个球面，它的半径为 $\dfrac{d^2}{2|\overrightarrow{AB}|}$，而球心在点 Q，使

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{d^2}{2|\overrightarrow{AB}|^2}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

88. $x\in\left\{\dfrac{\vec{a}^2}{\vec{b}^2},\ -\dfrac{\vec{a}^2}{2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}\right\}$.

90. 正射影：射影 $\vec{a}^{\vec{x}}=\dfrac{k}{|\vec{a}|}$. 因此若从空间某点 O 截取有向线段 $\overline{OA}\in\vec{a}$，则诸有向线段 $\overline{OX}\in\vec{x}$ 的端点将位于一面内，该平面垂直于直线 (OA) 和点 O 间的距离为 $\dfrac{|k|}{|\vec{a}|}$.

91. 可以令 $\overrightarrow{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\overrightarrow{c}$. 其次再利用等式：$\vec{a}\cdot\overrightarrow{p}=$

0， $\vec{b}\cdot\overrightarrow{p}=0$.

96．若将所求向量的坐标用(α, β, γ)表示，则

$$\alpha=\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}t,\quad \beta=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}t,\quad \gamma=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}t,$$

其中

$$t=\frac{\pm 1}{\sqrt{\begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\gamma_1\alpha_1\\ \gamma_2\alpha_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix}^2}}.$$

97． $\cos\widehat{BSC}+\cos\widehat{ASB}-\cos\widehat{ASC}=1$.

98．在所给的三面角的棱上截取三个单位向量：$\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\vec{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\vec{e}_3$；此时$\vec{e}_1\vec{e}_2=\cos\gamma$，$\vec{e}_1\vec{e}_3=\cos\beta$，$\vec{e}_2\vec{e}_3=\cos\alpha$. 设$(CD)\perp(AOB)$，$D\in(AOB)$. 于是

$$\overrightarrow{OD}=p\vec{e}_1+q\vec{e}_2.$$

利用条件：

$$\overrightarrow{CD}\cdot\vec{e}_1=0,\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{e}_2=0,$$

可以求出p和q的值，而后

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{OD}\cdot\vec{e}_3}{|\overrightarrow{OD}|}=\frac{p\cos\beta+q\cos\gamma}{\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos\varphi}},$$

所以：

$$\cos\varphi=\sqrt{(1-\cos^2\gamma)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.$$

99．平面与球面在点A处相切。

102．假定已知的是单位圆，而它的圆心在原点。$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{XA_1}=\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{XB_1}=1-\vec{x}^2$（根据相交弦的性质）。$\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{XA_1}$，于是有

$$\overrightarrow{AX}^2=\lambda(1-\vec{x}^2),\quad \lambda=\frac{\overrightarrow{AX}^2}{1-\vec{x}^2}.$$

类似地有

$$\overrightarrow{BX}=\mu\overrightarrow{XB_1},\quad \mu=\frac{\overrightarrow{BX}^2}{1-\vec{x}^2}.$$

$$\lambda+\mu=2 \Longleftrightarrow \frac{\overrightarrow{AX}^2}{1-\vec{x}^2}+\frac{\overrightarrow{BX}^2}{1-\vec{x}^2}=2.$$

再注意到$\vec{A}^2=\vec{B}^2=1$，我们就得到了所要求的点集方程

$$\left(\vec{X}-\frac{\vec{A}+\vec{B}}{4}\right)^2=\left(\frac{\vec{A}+\vec{B}}{4}\right)^2.$$

它确定一个圆。线段[OQ]是它的直径，其中O是已知圆的圆心，而点Q是线段[AB]的中点。

105．$4a^2\left(1-\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)$.

106．(1)$S_1(-2,\ 7)$，$S_2(4,1)$，$S_3(2,-3)$.

107．证明二向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$共线。

108．(1)$\begin{cases}x=3-t,\\ y=1-2t.\end{cases}\quad t\geqslant 0$.

109．(1)$\begin{cases}x=3+3t,\\ y=1-2t.\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 1$.

112．$A(0,\ 0)$，$B\left(\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$，$C\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，

$D\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

113．$(11,14)$.

114．(1) 根据条件

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\ \overrightarrow{AB}+\beta\ \overrightarrow{AD}.$$

再注意到

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{AM}=-\alpha\ \overrightarrow{CD}-\beta\ \overrightarrow{CB},$$

就得出：

$\overrightarrow{CM}(1-\beta,1-\alpha)$；(2)$(\beta,1-\alpha)$；(3)$(\alpha,1-\beta)$.

115．$O(-2,3)$，$A_1(-1,5)$，$A_2(-1,2)$.

116．(1) $x=4-2y$, $y\in Z$, $y<3$.

119. 设在标架 (A, B, C) 下：$A_1(1-\gamma, \gamma)$，$B_1(0, \beta)$，$C_1(\alpha, 0)$，并且

$$0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1, \quad 0<\gamma<1.$$

线段 $[AA_1]$，$[BB_1]$，$[CC_1]$ 的中点用 A_0，B_0，C_0 表示，只须证明二向量 $\overrightarrow{A_0B_0}$，$\overrightarrow{B_0C_0}$ 不共线就够了。

120. 分别讨论当 $a=a_1$ 和 $a \neq a_1$ 时的情况。

122. (1) $C_1\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C_2\left(-\sqrt{3}+\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

(2) $C_1\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$，

$$C_2\left(\frac{-2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right).$$

123. (1) $B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$，

$$C\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right);$$

(2) $B(1, 1+\sqrt{3})$，$C(1, 1-\sqrt{3})$.

124. 把最大一边的平方与其它两边的平方和相比较：(1) 直角三角形；(2) 锐角三角形；(3) 钝角三角形。

125. 126. 利用习题 80.

129. $x^2=-\frac{3}{2}y$.

130. $x^2-y^2=1$.

132. 三角形的重心；$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

135. 选取一标准正交标架，使三角形各顶点具有坐标：$B(0,0)$，$C(a,0)$，$A(\alpha,\beta)$，$\beta>0$. 有：

$$(\alpha^2+\beta^2=c^2, \ (\alpha-a)^2+\beta^2=b^2) \Longrightarrow$$

$$\alpha=\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}.$$

$$H\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a},\ 0\right),\ D\left(\frac{ac}{b+c},\ 0\right),\ M\left(\frac{a}{2},\ 0\right),$$

$$\left(\overrightarrow{HD}+\lambda\ \overrightarrow{DM}\right)\Longrightarrow\lambda=\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}.\ (\lambda>0)\Longrightarrow$$

(D在M和H之间)。

136．假定存在具有整数坐标的两个点

$$P(m,n)\neq Q(p,q)$$

使$|PM|=|QM|$．于是

$$\left(\sqrt{2}-1-m\right)^2+\left(\frac{1}{3}-n\right)^2=\left(\sqrt{2}-1-p\right)^2+\left(\frac{1}{3}-q\right)^2,$$

由此得出

$$2\sqrt{2}(p-m)=2(p-m)+(p^2-m^2)+\frac{2}{3}(n-q)-(n^2-q^2).(1)$$

如果$p-m\neq0$，则可用$2(p-m)$除等式两端，却得出$\sqrt{2}$是有理数，众所周知这是不对的。因而$p=m$．等式（1）呈：

$$(n-q)\left(\frac{2}{3}-n-q\right)=0$$

的形状。因为$(n+q)$是整数，故

$$\frac{2}{3}-n-q\neq0,$$

这就是说$n-q=0$，$n=q$．于是$P=Q$．

137．用反证法进行证明。

138．$(a,0)$，$\left(a\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$，$\left(2a,\ \frac{\pi}{3}\right)$，

$$\left(a\sqrt{3},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(a,\ \frac{2\pi}{3}\right).$$

139．$C(-1,\ -7)$．

141．（1）(AA_1)：$2x+y-3=0$，(BB_1)：$5x+4y-10=0$，
(CC_1)：$7x+5y-13=0$．

142．$x-2y+2=0$，$4x+y+5=0$，$5x-y+7=0$

143. (AB): $9x-7y-17=0$, (BC): $3x+8y-17=0$, (AC): $8x-y-17=0$.

144. (1) $x-2y-5=0$; $x+y-3=0$.

147. $\begin{cases} x=-1-3t, \\ y=1+2t. \end{cases}$

148. (1) $\begin{cases} 4x+y-13=0, \\ x\geqslant 2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x+y-13=0, \\ x\leqslant 3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+y-13=0, \\ 2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$

150. (1) $2x-y-1=0$; (2) $3x+2y+6=0$.

151. $\left(-\frac{13}{12},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\frac{13}{6}\right)$.

152. $6x+18y-5=0$.

153. (1) $3x-y+2=0$, $x-3y+6=0$, $x+y=0$;

(2) $6x+4y-12=0$, $3x+2y-6=0$, $2x+2y-5=0$.

154. $2x-7y+1=0$, $x+3y+18=0$, $4x-2y-7=0$.

155. (1) $x-3y+1=0$, $5x+9y+5=0$, $x-3y+25=0$, $5x+9y-19=0$, $x+3y-5=0$, $x+y+1=0$.

156. $x+3y-12=0$; $3x-y-10=0$.

157. $9x-3y+5=0$.

158. $2x+y-8=0$.

160. 设在标架(A, B, C)下，顶点D的坐标为(a, b). 求下列各点的坐标：

$$P=(AB)\cap(CD),\ Q=(AD)\cap(BC)$$

及线段$[BD]$，$[AC]$，$[PQ]$之中点M，N，L的坐标，并证明二向量$\overrightarrow{MN}$和$\overrightarrow{ML}$共线.

162. (1)是；(2)否；(3)否.

163. $\begin{cases} 3x+y\leqslant 0, \\ 2x-3y+1\leqslant 0. \end{cases}$

164. (1)是；(2)否。

165. $M_0\in\Delta ABC$, $l\cap\Delta ABC=\varnothing$.

166. (1) $\begin{cases}2x+y-1\leqslant 0,\\6x+2y+3\geqslant 0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+2y+2\geqslant 0,\\2x+4y-7\leqslant 0.\end{cases}$

167. $\begin{cases}3x-2y+8\geqslant 0,\\3x-2y\leqslant 0,\\x-2y+4\geqslant 0,\\x-2y\leqslant 0.\end{cases}$

168. 平行四边形。

169. $ABCD$.

170. $\begin{cases}x+y-3<0,\\3x+y-7<0,\\3x+2y-5<0.\end{cases}$

171. (1) $\begin{cases}x+y-4\geqslant 0,\\2x-y\geqslant 0,\\3x+2y-12\leqslant 0.\end{cases}$

172. 参看习题171.

173. $C_1\cdot C_2\cdot(A_1A_2+B_1B_2)>0$，注意到所给二直线夹钝角的特征不等式是：

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)\cdot(A_1A_2+B_1B_2)>0.$$

(参看习题210)。

174. (1)否；(2)是。

175. $2x-y\geqslant 0$.

176. (1) $\begin{cases}x=1+\alpha+2\beta,\\y=1-2\alpha-\beta,\\\alpha\geqslant 0,\\\beta\geqslant 0.\end{cases}$

177. $(M\in\Delta ABC)\Longleftrightarrow(\overrightarrow{CM}=\alpha\ \overrightarrow{CA}+\beta\ \overrightarrow{CB}$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta\leqslant 1)$.

(1) $x=3\alpha+2\beta$, $y=2-\alpha-3\beta$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta\leqslant 1$.

175. $(M\in ABCD)\Longleftrightarrow(\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad 0\leqslant\beta\leqslant 1)$.

(1) $x=-1+\alpha+2\beta,\ y=2-\alpha+\beta,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1$.

179. (1) $\overrightarrow{n}\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. $\overrightarrow{n'}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

181. $3x-3y-2=0$, $3x+6y-2=0$, $6x+3y-4=0$.

182. (1) $6x-4y+5=0$.

183. $|CB|=|CA|$, $x+y-5=0$.

184. (1) $2x-y-1=0$, $2x+5y-7=0$.

185. (1) $\left(2-\frac{9}{\sqrt{13}},\ 1+\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$.

186. (2) $\left(-\frac{40}{11},\ \frac{6}{11}\right)$.

187. $\begin{cases}x=x_1-\Delta\cdot A\\ y=y_1-\Delta\cdot B,\end{cases}$ 其中 $\Delta=2\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2}$.

188. (1) $(9,\ -5)$, $(-13,\ -27)$.

189. (BC): $x-y-3=0$, (AC): $4x+5y-20=0$.

190. (AB): $3x-7y-41=0$, (BC): $7x+3y+59=0$.
(AD): $7x+3y+1=0$, (DC): $3x-7y+17=0$.

191. (BC): $5x+y+3=0$, (AB): $x-5y+11=0$.

192. (BC): $2x-y-3=0$, (AB): $x-2y+6=0$.
(AC): $x+y-5=0$.

193. $x+5y+2=0$, $5x+y-6=0$, $23x-11y-24=0$.

194. 如果 B 和 C 是位于直线 d 一侧的三角形 ABC 的二顶点，则

$$\rho(B,d)+\rho(C,d)=\rho(A,d).$$

195. $h=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

196. $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})x+(\sqrt{5}+\sqrt{2})y+\sqrt{5}=0$,
$(\sqrt{5}+2\sqrt{2})x+(\sqrt{5}-\sqrt{2})y+\sqrt{5}=0$.

197. (1) $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$; $\left(-\frac{3}{4},\ 0\right)$.

198. (1) $4x+4y+5=0$; (3) $8x-4y+5=0$.

199. (1) $y=2$, $y=-1$ 或 $12x-5y-2=0$ 和 $12x-5y-41=0$.

200. $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{Ax_0+By_0+C}{|Ax_0+By_0+C|}\cdot h$.

201. 二直线的并:

(1) $(2\sqrt{5}-3)x+(2\sqrt{5}-1)y-2\sqrt{5}=0$ 和

$(2\sqrt{5}+3)x+(2\sqrt{5}+1)y-2\sqrt{5}=0$.

202. $3x-3y+2=0$.

203. 所求的图形是八边形各边的并，该八边形的顶点，是用已知正方形的各边作正方形（向它的外部）、而这些正方形诸顶点中不是已知正方形顶点的那些顶点。

204. $\left(-\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right)$.

205. $M(2,4)$, $N(0,9)$, $P(-5,7)$.

206. (2) $C(1,1)$, $D(-1,2)$.

207. $4x-4y+3=0$.

208. $x-2y-2=0$.

209. $x-y-5=0$.

210. 设F_1和F_1'是已知两直线所限定的两锐角区域的内部，F_2和F_2'是钝角区域的内部。从二已知直线的交点N_0截取线段$\overrightarrow{N_0N_1}\in\vec{n}_1(A_1, B_1)$和$\overrightarrow{N_0N_2}\in\vec{n}_2(A_2, B_2)$. 因为$\vec{n}_1\perp l_1$及$\vec{n}_2\perp l_2$、故该二线段的端点或在$F_2$内、或在$F_2'$内。可能有两种情况。

(a)二点N_1，N_2位于同一区域内，比如在F_2内。这时两向量$\vec{n}_1$和$\vec{n}_2$之间的夹角等于已知两直线间的锐角，并因此

$$\vec{n}_1\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2>0.$$

从直线$Ax+By+C=0$的任意点处所截线段$\overrightarrow{N_0N_1}\in\vec{n}(AB)$的

端点都位于一半开的平面内，该半开平面的特征不等式是：

$$Ax+By+C>0.$$

因此在这种情况下，锐角区域内部的特征不等式是：

$$A_1x+B_1y+C_1>0 \text{ 且 } A_2x+B_2y+C_2<0 \text{ 或}$$

$$A_1x+B_1y+C_1<0 \text{ 且 } A_2x+B_2y+C_2>0.$$

因而对锐角所有内部的点都有：

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)(A_1A_2+B_1B_2)<0.$$

(b) 点 N，N_2 在两不同区域 F_2 和 F_3 的内部。这时向量 $\vec{n}_1$、$\vec{n}_2$ 之间的夹角等于已知两直线间所夹的钝角，因此

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2<0.$$

在这种情况下，锐角区域内部的特征不等式是

$$A_1x+B_1y+C_1>0 \text{ 且 } A_2x+B_2y+C_2>0 \text{ 或}$$

$$A_1x+B_1y+C_1<0 \text{ 且 } A_2x+B_2y+C_2<0.$$

于是在这种情况，就锐角的全部内点所指的不等式都成立。

211．$17x-6y-11=0$．

212．$\cos\varphi=-\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

213．$\operatorname{tg}\hat{A}=\dfrac{29}{2}$，$\operatorname{tg}\hat{B}=\dfrac{29}{63}$，$\operatorname{tg}\hat{C}=\dfrac{29}{11}$.

214．$2x+y-7=0$，$x-2y-6=0$．

215．$2x+3y-6=0$．

216．(AB)：$2x-y=0$；(AC)：$x-2y+3=0$，

(BC)：$22x+4y+15=0$．

217．$3x+y+16=0$．

218．(BC)：$3x-y-4=0$，(AD)：$3x-y+16=0$．

219．设在仿射标架 (A,B,C) 下，点 P 具有坐标 (a,b)．算出点 A_1，B_1，C_1 的坐标，列出直线 (AA_1)，(BB_1)，(CC_1) 的方程，并证明它们相交于一点。

220．在仿射标架 (A,B,C) 下，记点的坐标为 $P(0,a)$ 和 $M(b,0)$；写出所讨论的各直线方程并证明它们属于同一线束。

222. 第一个圆切于第二个圆、而和第三个圆有两个公共点；第二个圆与第三个圆没有公共点。

223. （2）$M\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

224. （1）$M\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right)$.

225. $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 25, \\ x^2+y^2\geqslant 4. \end{cases}$

226. 由下列圆周所限定的半圆。

$$(x+2)^2+(y-3)^2=13.$$

227. $b^2=R^2(1+k^2)$.

228. （1）$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=25, \\ -4\leqslant x\leqslant 6, \\ -2\leqslant y\leqslant 2. \end{cases}$

230. 当$b>a\sqrt{2}$时，所求的点集是半径为$\sqrt{b^2-2a^2}$的圆，其心是已给正方形的中心。当$b=a\sqrt{2}$时，则是正方形的中心。当$b<a\sqrt{2}$时，则是空集。

234. 把坐标系的原点选取在线段$[AB]$的中点，使点A和B属于轴Ox：$A(-c,0)$，$B(c,0)$，$C(a,h)$。说明当a为何值时，三角形ABC的外接圆才能有最小半径。外接圆心的坐标 $Q\left(0, \frac{a^2+h^2-c^2}{2h}\right)$，可由条件

$$|AQ|^2=|BQ|^2=|CQ|^2$$

求得。再算出$R^2=|QB|^2$，可以证明：当$a=0$时，半径R有最小值，并且它等于$\frac{h^2+c^2}{2h}$.

236. $\left(-\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$或$\left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$. 在第三种情况就得到平行四边形。

237．（1）是图形Φ关于直线 $y=x$ 的对称图形；（2）是图形Φ关于横轴的对称图形。

238．（2）是一、三坐标角内部的并；（3）是第三坐标角与第一坐标角之平分线的并；（4）是以诸点 (0,0) 和 (1,1)；(1,1) 和 (2,2)；(2,2) 和 (3,3) 等等；(0,0) 和 (−1,−1)；(−1,−1) 和 (−2,−2) 等等为对顶点的正方形之并。（5）*是两个射线集合的并：第一个中的始点是 (0,0)，(0,1)，(0,2)，…，(1,0)，(2,0)，…，而与第一坐标角之平分线有相同方向，第二个中的射线始点是 (0，−1)，(0，−2)，…，(−1，0)，(−2，0)，…，并与第三坐标角之平分线有相同方向；（7）是由直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 所界定的全部角域的内部（包括横轴上的点）之并。

239．$\left(x-\frac{x_1+x_2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{3}\right)^2=\frac{a^2}{9}$.

242．$M_1(4,1)$，$M_2(1,4)$.

243．(0,2)，(0,−3)，$\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

246．对所给标架是负的。

253．利用赛瓦定理（习题 252）。

260．全平面。

263．若已知线段的长大于矩形对角线的长，则所求的点集是圆，它以矩形的对称中心为心、半径 $R=\frac{1}{2}\sqrt{m^2-(a^2+b^2)^2}$，其中 m 是线段的长，a 和 b 是矩形的边长。当 $m=\sqrt{a^2+b^2}$ 时，是一个点（矩形的对称中心）。当 $m<\sqrt{a^2+b^2}$ 时，是空集。

267．一正方形各边的并，它的顶点位于已知各直线上，而其对角线的长等于已知线段长的二倍。

268．过已知矩形两对边中点的两条直线之并。

269．选取笛卡儿直角坐标系，使三角形的顶点具有坐标：

---

* （5）之答案不全，正确答案应是一族平行线 $x-y=k$，$k\in Z$（整数集）之并

——译者注。

$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,\sqrt{3})$．那么能使 $|MA|^2+|MB|^2=|MC|^2$ 的点 M 之集合，是一个圆，它的心是点 C 关于 (AB) 的对称点，而半径等于三角形的边长。

270．是一条直线，该直线垂直于直线 (AB) 并过一个这样的点 $M_0\in(AB)$，它使

$$(BA,\ M_0)=\frac{a^2-k^2}{a^2+k^2},$$

其中 $a=|AB|$．

271．选取一坐标系，使正方形的顶点属于二坐标轴。图形 Φ 是已知正方形的外接圆。

272．（1）当 $b\neq 1$，是心在 (AB) 上的圆；当 $b=1$，是线段 $[AB]$ 的中垂线；当 $\sqrt{2}b>|AB|$，是以线段 $[AB]$ 中点为心的圆；当 $\sqrt{2}b=|AB|$，是 $[AB]$ 的中点；当 $\sqrt{2}b<|AB|$，是空集。

273．设 $ABCD$ 是已知四边形。利用标架 $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ 和公式：$S_{NML}=\frac{1}{2}|(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{ML})|$.

274．在笛卡儿直角坐标系里，其中横轴与直线 l 重合，而点 A 具有坐标 $(0,a)$，所求的点集方程是

$$y=\frac{1}{2a}x^2+\frac{a^2-d^2}{2a},$$

它确定一条抛物线。

275．是过已知点并且与已知直线成 30° 角的两条直线之并。

276．抛物线。

283．角 ACB 的平分线（无点 C）和以 $[AB]$ 为直径的半圆（无点 A 和 B）之并。

284．以底边的中点和向底边引之高线的中点为端点的线段之内点的集合。

285．是三角形 ABC 的各边和它的三个圆弧三角形（去掉顶点 A，B，C）外部的并，其中每个圆过三角形 ABC 的两个顶点，而其心是 $\triangle ABC$ 的重心关于二顶点所在直线的对称点。

288．（1） 7个平方单位．

289．（1）(0，－6)或(0，16)．

290．$\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_0B_0C_0}}=\dfrac{4a^2b^2c^2}{(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$．

291．四个点：三角形ABC的重心M及诸平行四边形$ABCM_2$，$ACBM_3$，$CABM_4$的第四个顶点。

295．是两条直线的并，其中一条过顶点A平行于(BC)，而另一条过点A及$[BC]$的中点。

296．顶点为A，C和$[BC]$中点的三角形之内点集合。

297．$\dfrac{S_1}{S}=\left|\dfrac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\right|$．

298．在仿射标架(A,B,C)下，所求的点具有坐标$\left(\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{3}\right)$，

$\left(\dfrac{m}{m+n+p},\ \dfrac{n}{m+n+p}\right)$．

299．如果$(AB)\cap(CD)=O$，则所求的集合是过点O的两条直线的并，并使它们上的点到(AB)和(CD)的距离之比等于$|CD|:|AB|$；再从这个并集中去掉点O．

如果$(AB)\parallel(CD)$，并且$|AB|\neq|CD|$和$(AB)\neq(CD)$，则所求的集合是这样两条直线的并，它们和已知二直线平行，并使它们上的点到(AB)和(CD)的距离之比等于$|CD|:|AB|$．

如果$(AB)\parallel(CD)$，并且$(AB)\neq(CD)$和$|AB|=|CD|$，则是一条直线，它平行于已知直线，并且它的点到直线(AB)和(CD)等距。

如果$(AB)=(CD)$和$|AB|=|CD|$，则是去掉直线(AB)的整个平面。

如果$(AB)=(CD)$和$|AB|\neq|CD|$，则是空集。

300．所求的点集是无端点的线段，该线段是四边形$ABCD$与过其两对角线中点之直线的交。

301．设在仿射标架(A,B,C)下，顶点C具有坐标(a,b)．算出

点 O 的坐标和所指出的各三角形的面积，再将四边形顶点的坐标代入已知等式，就可以证明 $b=1$，由此即可推出：

$$(DC) \parallel (AB).$$

302. 利用标架 $(A_2, \vec{i}, \vec{j})$，其中 $\vec{i}$ 是向量 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 的单位向量，而 $\vec{j}$ 是向量 $\overrightarrow{A_2A_1}$ 的单位向量。

313. $\begin{cases} x' = x - \dfrac{2k}{k^2+1}(kx - y + b), \\ y' = y + \dfrac{2}{k^2+1}(kx - y + b). \end{cases}$

320. 设 a, b, c 是所给出的对称。首先证明 $(c \circ b \circ a)^2$ 是平移。

322. 应用可由已知推得的等式：

$$a \circ b \circ c = (a \circ b \circ c)^2.$$

323. 先证明四个轴对称的合成等于两个轴对称的合成。

326. $\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' = y_0 + (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases}$

328. $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$.

331. (BC)：$(\sqrt{3}-2)x + (1+2\sqrt{3})y + 27 - 7\sqrt{3} = 0$，
(AC)：$(2+\sqrt{3})x + (2\sqrt{3}-1)y - 27 - 7\sqrt{3} = 0$.

335. 利用习题 332 和 334.

339. 将问题表示成轴对称的合成并利用三条直线属于同一线束的判别法。

340. 利用习题 335.

342. 绕已知三角形的中心旋转 $120°$.

343. 利用旋转 f，将平面绕 n 边形 Φ_2 的中心转角 $\dfrac{2\pi}{n}$，并证明：$f(\Phi_1) = \Phi_1$，$f(\Phi_2) = \Phi_2$.

351. $2x - 3y - 4 = 0$.

352. $\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x + 1. \end{cases}$

357. $180° - \beta$，其中 $\beta = \widehat{ABC}$.

359. 先作出 $A_2 = a(A)$ 和 $C_2 = c(C)$. 再注意到，$(c \circ b \circ a)(A_2) = A$ 和 $(c \circ b \circ a)(C) = C_2$，其中 $a = (BC)$，$b = (AC)$，$c = (AB)$.

366.（1）以(1,0)为中心的旋转；（2）以 $2x - y - 2 = 0$ 为轴的对称。

368. $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 1, \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 2. \end{cases}$

369. $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

371.（1）就向量 $\overrightarrow{OO'}$ 的平移；（2）关于线段 $[OO']$ 中点的对称；（3）平面绕点 $S = m_1 \cap m_2$ 的旋转，其中 m_1 和 m_2 分别是线段 $[OO']$ 和 $[A_1A_1']$ 的中垂线；（4）是关于角 A_1OA_1' 的平分线之所在直线的对称；（5）(a) 关于 d 的对称，(b) 以 d 为轴和以 $\overrightarrow{O_1O_1'}$ 为向量的滑动对称，其中 O_1 和 O_1' 是 O 和 O' 在 d 上的正射影。

372. $11x + 2y - 3 = 0$.

374. $\begin{cases} x' = x - 2A\dfrac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}, \\ y' = y - 2B\dfrac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}. \end{cases}$

378. $\begin{cases} x' = -2x + 3, \\ y' = -2y - 3. \end{cases}$

385. 设点 O 是三角形 ABC 的重心，A_0 是 $[BC]$ 的中点，A_0' 是 $[B'C']$ 的中点。$(BC) \parallel (B'C') \Longrightarrow BB'C'C$ 是梯形 $\Longrightarrow O \in (A_0A_0')$. $(A'A_0') = (AA_0) \Longrightarrow O \in (A'A_0')$. 点 O 属于三角形 $A'B'C'$ 的任意一条中线。

387．利用以M为中心、k为系数的位似和以N为中心、$-\frac{1}{k}$为系数的位似的合成。

391．要证明：两个以不同点为中心的已知位似的合成，是以第三个点为中心的位似中的一个。

393．证明：$\overrightarrow{A_2B_2}=\frac{k^2+k+1}{(1+k)^2}\overrightarrow{AB}$（$\overrightarrow{B_2C_2}$，$\overrightarrow{C_2A_2}$也类似）。

395．在标架R下，记$\alpha=(\widehat{\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{O'A_1'}})$，$O'(x_0,y_0)$，$M(x,y)$，$f(M)=M'(x',y')$按坐标变换公式有：

$$\begin{cases}x'=k(x\cos\alpha-\varepsilon y\sin\alpha)+x_0\\ y'=k(x\sin\alpha+\varepsilon y\cos\alpha)+y_0\end{cases}$$

其中$\varepsilon=\pm1$. 在标架R下，该公式确定一个以k为系数的相似。因而f是以k为系数的相似。

399．
$$\begin{cases}x'=\frac{48}{25}x-\frac{14}{25}y-\frac{192}{25},\\ y'=\frac{14}{25}x+\frac{48}{25}y-\frac{6}{25}.\end{cases}$$

400．
$$\begin{cases}x'=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}y+\frac{9}{5},\\ y'=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{7}{5},\end{cases}\qquad (5,-1),\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

404．利用位似和过位似中心的轴对称之合成是相似。

409．应用性质：相似的不动直线按比值k内分（外分）线段$[A_1A]$，k是相似系数，(A,A_1)是与此相似相对应的点对。

410． 4和4．

412．$(A_1A_2)\parallel(B_1B_2)$，$(A_1B_1)\nparallel(A_2B_2)$．

414．对于第一类相似：如果$a\parallel a_1$，则是(AA_1)；如果$a\cap a_1=M$，则是过点A,M,A_1的圆。

415．以线段$[PQ]$作直径所画出的圆，其中P和Q是按比值

k 分线段$[A'A]$之内分点和外分点。

417．参看习题415．

118．应用习题415的结果。

423．$\begin{cases} x' = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}, \\ y' = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

425．如果 Ox是错切的轴，则

$$\begin{cases} x' = x + ky, \\ y' = y. \end{cases}$$

426．如果每一斜对称轴都属于另一斜对称的不动直线束。

427．如果二对称轴平行。

429．错切。

432．任意两条直线(MO)和(NO)，如果

$$(AB, M) = (BC, N),$$

其中 $ABCD$是平行四边形，O 是它的中心。

435．是。

436．不唯一确定。

440．$\begin{cases} x' = 2x - y - 1, \\ y' = x + 2y + 5. \end{cases}$

441．(1，2)．

443．$\begin{cases} x' = 5x - 2y + 6, \\ y' = 4x - y + 6. \end{cases}$

444．$\begin{cases} x' = x - y + 1, \\ y' = -2y - 1. \end{cases}$

453．就正方形来讨论本题，并且再利用图形的面积和在仿射变换下其像的面积之比是定值$S_0 = \dfrac{Q}{\lambda^2 + (1+\lambda)^2}$.

454.

$$S=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}^2}{\left|\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\A_3 & B_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\A_1 & B_1\end{vmatrix}\right|}.$$

455. $\dfrac{S^1}{S}=\dfrac{(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2}{|[1+\lambda_1(1+\lambda_3)][1+\lambda_2(1+\lambda_1)][1+\lambda_3(1+\lambda_2)]|}$.

459. 设由三对对应点对(A,A_1)，(B,B_1)，(C,C_1)给出了一仿射变换。作$\triangle A_1B_1C_0\backsim\triangle ABC$. 或以$(A_1B_1)$为轴的错切、或关于轴$(A_1B_1)$的压缩都能将$\triangle A_1B_1C_0$变成$\triangle A_1B_1C_1$.

460. 就标架$(L,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$写出所给压缩的坐标变换公式，其中$\bar{e}_1$，$\bar{e}_2$分别平行于直线l_1和l_2.

461. 作出$f^{-1}(a)$和$f(a)$；$M=f^{-1}(a)\cap a$和$M'=a\cap f(a)$是在仿射变换f下所求的对应点。如果它们存在。

462. 作出$A_1=f^{-1}(A)$和$A_2=f(A)$；(A_1A)和(AA_2)是对应直线，如果$f(A)\neq A$.

467. 过点M引一条与直线a和b平行的直线，过点M_1引一条与直线a_1和b_1平行的直线。

468. (1) 是，如果不动直线相交；(2) 是。

469. 证明：在标架$(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$下，点$M(x,y)$变成点$M'(y,1-x)$. 因此$A_1(a,b)\mapsto B_1(b,1-a)$，$B_1\mapsto C_1(1-a,1-b)$，$C_1\mapsto D_1(1-b,a)$. 由此可推得$A_1B_1C_1D_1$是平行四边形，如果点$A_1,B_1,C_1,D_1$不属于一条直线。

472. 如果$f_1(A)=f_2(A)=A'$和$f_1(B)=f_2(B)=B'$，则对变换$f_2^{-1}\circ f_1$，直线(AB)的每个点都是不动的。因而对每个点$M\in(AB)$有：

$$(M,f_1(M))=(M,f_2(M)).$$

474. $S^2_{A_1B_1C_1}=S_{ABC}\cdot S_{A_2B_2C_2}$.

476. 对所给的仿射变换f：$f^5=E$. 这就是说，f是一类等仿射变换，并且从$S_{ABC}=S_{BCD}$推得：$(BC)\parallel(AD)$.

509．用字母 Q 表示三圆的公共点，用 A，B，C 表示它们的二重交点。例如，过点 A 引垂直于直线 (QA) 的直线。再利用关于(QA)，(QB)，(QC)为轴的对称。

510．利用平面绕各正方形（在平行四边形 $ABCD$ 各边上所作的）的中心旋转的乘积。

512．(KM) 是滑动对称轴，它使$[AB]$映射成$[DC]$．直线(KM)等倾斜于直线(AB)和(CD)．

514．两段弧（去掉弧的二端点），从弧上的点看线段$[MS]$成角$\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$．

515．讨论以点 M 为中心、$-\frac{1}{2}$为系数的位似。

516．首先证明点 M_3, M_4, M_5 是点 A_3, A_4, A_5 位似的像。

519．在以 A 为中心、$\frac{1}{2}$为系数的位似中，Φ 是圆 γ（在点A处穿孔）的像。

535．能。

536．讨论以下两种位似的合成：

(1)以 K 为中心、以(A, D)为对应点对的位似和以 N 为中心、以(D, C)为对应点对的位似。

(2)以 L 为中心、以(A, B)为对应点对的位似和以 M 为中心、以(B, C)为对应点对的位似。

541．$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{5}a\right)^2}=1$．

543．$(-4,0)$，$\left(5,-\frac{9}{5}\right)$．

544．$4x+3y-110=0$；

$(7,9)$．

545．$B(-1,6)$，$D(7,2)$．

$F(3-2\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3})$，$F'(3+2\sqrt{3}, 4-\sqrt{3})$．

546. 椭圆的一部分。

547. $(x-\varepsilon^2x_0)^2+y^2=b^2$，其中 ε 是椭圆 γ 的离心率。*

549. $8x-9y+25=0$.

551. $2ab$，其中 a 和 b 是椭圆的半轴。

552. $\rho(F,t_1)\cdot\rho(F,t_2)=b^2$，其中 b 是短半轴。

554. 以椭圆的中心为圆心和半径 $r=a$（长半轴）的圆。

555. 以椭圆一焦点为圆心、半径等于长轴的圆。

556. $\pm x\pm y+\sqrt{a^2+b^2}=0$.

557. $2\dfrac{a^2+b^2}{a}$.

559. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}$ 和已知椭圆的中心。

562. 利用椭圆与圆的仿射等价。

564. 参看习题562的提示。

566. 与椭圆γ位似的椭圆。

567. 参看习题562的提示。

568. $k_1=\dfrac{-4+\sqrt{7}}{9}$，$k_1'=\dfrac{4+\sqrt{7}}{9}$，

$k_2=\dfrac{-4-\sqrt{7}}{9}$，$k_2'=\dfrac{4-\sqrt{7}}{9}$.

569. $\operatorname{tg}\varphi=-\dfrac{a^2k^2+b^2}{kc^2}$.

572. $\dfrac{4}{5}$.

---

* 答案错。设 $(x-\lambda)^2+y^2=r^2$ 是所求，过 $(x_0,\pm y_0)$ 两点，由 (x_0,y_0) 处圆半径斜率 $=\dfrac{y_0}{x_0-\lambda}$，椭圆切线斜率 $=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$。利用相切 $\lambda=\varepsilon^2x_0$，$r^2=(x_0-\lambda)^2+y_0^2=b^2\left(1-\dfrac{\varepsilon^2x_0^2}{a^2}\right)$。正确答案是 $(x-\varepsilon^2x_0)^2+y^2=b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)$。

——译者注

573. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$，$\forall a, a>c, 2c=|F_1F_2|$。

574. M_1——内点，M_2——外点，点 M_3 属于椭圆。

576. $x+y\pm5=0$.

579. 在标架(O, A_1, A_2)下，其中$O=l\cap m$, $A_1\in l$, $A_2\in m$, $|OA_1|=|OA_2|=1$，这个事实表明$|AB|$,$|AM|$,$|BM|$的长是定值$(M(x, y)\in\Phi)$.

580. $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$, $\left(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$, $\left(-\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$, $\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

584. $(1, -1)$, $(-1, 5)$.

585. (1)相似；(2)不相似。

588. $-\frac{1}{2}ab$.

595. 所给双曲线的左枝。

597. $k=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$.

598. 如果$a\leqslant b$，这种切线不存在。

599. $a=b$.

600. $xy=\frac{a^2}{2}$或$xy=-\frac{a^2}{2}$.

601. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.

602. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

604. $\frac{\pi}{2}$

605. $\left(\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}, \pm1.8\right)$.

606. $\frac{2ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$. 当$b>a$时，能有内接正方形。

607. $x=1$, $5x-2y+3=0$.

608. $5x-2y\pm9=0$.

609. b^2.

610. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

611. $\rho=\frac{25}{12-13\cos\varphi}$.

614. 双曲线。

615. 两条共轭的双曲线。

616. 双曲线。

620. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

621. $9x^2-6xy+y^2-68x-4y+164=0$.

$$p=\frac{2}{5}\sqrt{10}.$$

623. $(-3,-6)$, $\left(\frac{3}{4},\ 4\right)$.

624. 抛物线与直线的并。

627. 已知抛物线的准线。

632. 如果 $B\neq0$, 抛物线, 如果 $B=0$, 已知直线。

633. $p=\frac{l^2}{2h}$.

634. $k=1$.

635. $y=1$.

636. $y^2=2p'\left(\varepsilon x-\varepsilon\frac{p}{2}+\frac{p'}{2}\right)$; $\varepsilon=\pm1$; $p'>0$.

637. $p=2$.

638. 在抛物线顶点处相切的切线。

639. $\rho=\frac{4}{1-\cos\varphi}$.

640. $y^2=12x$.

642. 2.

644. 去掉已知点的直线或抛物线。

647. $k=3\sqrt{2}$.

648. $(x+2y)^2-6x-2y+1=0$.

649. $4x^2+7xy-15y^2-4x+90y-156=0$.

650. $(0,\ 1)$, $\left(-\frac{9}{2},\ 1\right)$, $\left(\frac{30\pm\sqrt{50}}{50},\ \frac{-5\mp\sqrt{50}}{25}\right)$.

651. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

652. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

653. $8x^2-24xy+15y^2+22x-22y+4=0$.

654. $x+y+2=0$.

655. 对于点 A：$x-2y+2=0$，$x-8y+32=0$；

对于点 B：$x-2y+2=0$.

对于点 C：没有切线。

656. 已知抛物线的准线。

658. $y-2=\frac{6\pm\sqrt{21}}{5}(x-3)$.

659. $A^2a^2+B^2b^2-C^2=0$.

660. $B^2p=2AC$.

661. $A^2a^2-B^2b^2-C^2=0$.

662. $x\pm y\pm 3=0$,

$x\pm y\mp 3=0$.

664. (1) $C(-66,-28)$；(2) $C\left(\frac{32}{11},\ -\frac{15}{22}\right)$；

(3) 无中心；(4) $C\left(1,\ -\frac{3}{5}\right)$；

(5) $C(0,\ 0)$；(6) 中心所在直线。

665. $28x-19y+24=0$.

666. $36x+29y+22=0$.

667. (1) $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$；(2) $k_1=-3$, $k_2=\frac{1}{3}$；

(3) $k_1=-\frac{1}{2}$, $k_2=2$, (4) k_1 和 k_2 不确定（圆）。

668. (1) $x+6y=0$, $6x-y-37=0$;

(2) $20x+20y+21=0$, $2x-2y-7=0$.

669. (1) $\frac{x^2}{\frac{2}{9}}+\frac{y^2}{\frac{2}{9}}=1$;

(2) $\frac{x^2}{\frac{52}{47}}+\frac{y^2}{\frac{52}{7}}=1$;

(3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$.

670. (1) $y^2=\frac{4}{5\sqrt{5}}x$;

(2) $y^2=\frac{2}{\sqrt{13}}x$;

(3) $y^2=\frac{6}{\sqrt{10}}x$.

672. $(0,0,0)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$.

673. $\frac{7}{2}$; $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{2}$.

678. $x=a_1+t(a_2-a_1)$, $y=b_1+t(b_2-b_1)$,

$z=c_1+t(c_2-c_1)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

679. (1) $(-1,4,-3)$, (2) $(-1,2,1)$.

680. $x=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}$,

$$z=-\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}.$$

684. R' 是正定向。

685. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{3}\pm 1}$.

636. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

687. $\frac{5}{6}\pi$.

688. (1) $\sqrt{21}$.

689. $D\left(\frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{3}{2}\right)$, $|AD|=\frac{\sqrt{570}}{5}$.

690. 45°.

691. (1) $C\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

692. 圆。

693. (1) $\left(\frac{21}{13}, \frac{14}{13}, \frac{-5}{13}\right)$.

694. $\cos\hat{A}=-\frac{89}{91}$, $\cos\hat{B}=\frac{23}{7\sqrt{11}}$, $\cos\hat{C}=\frac{36}{13\sqrt{11}}$.

695. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-z'$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$.

696. $\rho(l_1, l_2)=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

698. $m^2=s^2=(p-t)^2$.

700. 讨论等式：

$$[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}]=0, [\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{b}]=0.$$

701. 150.

702. $$\rho(M_1,l)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & a_1 \\ y_1-y_0 & a_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1-y_0 & a_2 \\ z_1-z_0 & a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & a_3 \\ x_1-x_0 & a_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

703. $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

704. $\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

706. $\frac{1}{4}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

707. $(-1,2,3)$, $(0,0,1)$.

709. $$\vec{x}=\frac{\alpha[\vec{b},\vec{c}]+\beta[\vec{c},\vec{a}]+\gamma[\vec{a},\vec{b}]}{[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}}.$$

710. $$\vec{x}=\frac{1}{[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}).$$

711. $$\overrightarrow{OH}=\frac{|[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}|}{\vec{m}^2}\vec{m},$$

其中 $$\vec{m}=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}].$$

712. 计算：$\vec{n}=[\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{b}]=\vec{0}$.

714. 不可能。

715. $\frac{1}{2}\sqrt{1562}$.

716. $-58\vec{i}-20\vec{j}+\vec{k}$; -80.

718. $\frac{1}{6}abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$.

720. $\frac{\pi}{2}$.

721. $$\frac{V'}{V}=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}.$$

722. $\frac{V}{V'}=27$.

723. 12.

724. 4∶3.

725. 3.

726. 3∶5.

728.

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{\left|\det\begin{pmatrix} x_0'-x_0 & a_1 & b_1 \\ y_0'-y_0 & a_2 & b_2 \\ z_0'-z_0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2}}.$$

729. $\frac{1}{6}abh\sin\varphi$.

730. $\frac{[illegible]}{3}$.

731. 3 .

733. $\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2-b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$.

736. $x=2+u-2v, y=-5+9u+5v, z=1-3u-2v$.

738. 向量 $\vec{a}$ 的坐标构成下列方程的解：

$$5a_1-2a_2-3a_3=0 .$$

739. $x=2+u, y=-1+2u+3v, z=3+v$.

740. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

741. $x+y+z-6=0$ ，$14x+13y+9z-74=0$ ，$8x+7y+5z-40=0$ ，$x+y+z-7=0$ ，$14x+13y+9z-70=0$ ，$8x+7y+5z-42=0$.

743. (1) $x-y-z-7\leqslant 0$ ，$2x+y-3z+3\leqslant 0$ ；

(2) M_1 和 M_2 是对顶二面角的内点。

744. 点 M_0 位于四面体的内部。

745. $\Phi_1=\{M(x,y,z)\mid x-2y-3z+5<0$ 且 $2x-4y-6z+7<0\}$,

$\Phi_2=\{M(x,y,z)\mid x-2y-3z+5>0$ 且 $2x-4y-6z+7<0\}$,

$\Phi_3=\{M(x,y,z)\mid x-2y-3z+5>0$ 且 $2x-4y-6z+7>0\}$.

746. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

747. $2x+6y-4z-56=0$.

749. $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-5)^2=49$,

$(x+1)^2+(y-7)^2+(z-9)^2=19$.

750. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=36$.

752. $D'(4, -2, -1)$.

753. $7x-5y+11z-52=0$.

754. $x+z-3=0$.

755. $M(1, 2, 0)$.

756. $S=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$.

757. $\frac{1}{3}$.

758. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

759. $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$.

760. $\cos\varphi=\frac{1-\cos^2\beta}{\sqrt{2(1+\cos^2\beta)}}$.

761. $\cos\varphi=\frac{2h}{\sqrt{4h^2+(a^2+b^2)}}$.

763. $\rho(M_0, \Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

764. $|DH|=1$.

765. $\rho(S, \Pi)=\frac{2ah}{\sqrt{4h^2+9a^2}}$.

766. $2x+y-4z+17=0$, $2x+y-4z-25=0$.

767. $\rho(B, \Pi)=\frac{16}{\sqrt{41}}$.

768. $\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}\cdot h$.

769. $8x+12y+4z+3=0$.

770. $2x-y-z+2=0$.

771. $\left(1, -3, -\frac{5}{2}\right)$.

772. $\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

773. $x-2y-2z-10=0$, $2x+2y-z+1=0$.
$2x-y+2z+10=0$, $2x-y+2z-4=0$.

774. $2x-y+2z-3=0$, $x-2y-2z-12=0$,
$2x+2y-z\pm 9=0$.

775. $3x-2y+3z-4=0$.

776. $3x-2y+2=0$.

778. $3x+y-4z+5=0$, $\cos\varphi=\frac{4}{9}$.

779. $5x-5y-2=0$.

780. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$.

781. $x=x_1-A\cdot\Delta$, $y=y_1-B\cdot\Delta$, $z=z_1-C\cdot\Delta$,

其中 $\Delta=2\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}$.

782. $2x-2y-z+3=0$.

783. 应用归纳法。

786. $3x+z+16=0$.

787. $M_1\in l$, $M_2\notin l$.

788. $x=2+t$, $y=3-t$, $z=-1+t$.

790. $\begin{cases}x-3y-2z-5=0,\\3x+5y-6z-1=0.\end{cases}$

791. $(-1,-11,0)$.

792. $\cos\varphi=\frac{19}{15\sqrt{2}}$.

793. (1) 相交；(2)相错；(3) 相错；(4) 相错；(5)平行；(6) 相交。

794. $x=1+4t$, $y=-2t$, $z=t$.

795. $\begin{cases} x-3y+5z+2=0, \\ x-2y-5z+9=0. \end{cases}$

796. $x=1+11t,\ y=-\frac{1}{2}-5t,\ z=-7t.$

797. $\begin{cases} 5x+y+5z-6=0, \\ x+5y-2z=0. \end{cases}$

798. $x=-1-t,\ y=3+3t,\ z=2+4t.$

799. $\begin{cases} 2x-y+10z-47=0, \\ x+3y-2z+6=0. \end{cases}$

800. $\cos(\widehat{l_1, l_2})=\sin\alpha\cdot\sin\beta.$

801. $x=4+32t,\ y=1+t,\ z=-2-5t.$

802. $\begin{cases} 2x+2y-z-14=0, \\ 10x+11y+4z-53=0. \end{cases}$

803. $\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ x-y-z-5=0. \end{cases}$

804. $\begin{cases} 2x-y+z-20=0, \\ x+y+z-10=0. \end{cases}$

805. $x-2y+2z+3=0.$

806. $\dfrac{\lambda a\sqrt{2h^2+4a^2\lambda^2}}{(1+\lambda)(1+2\lambda)}.$

807. $\begin{cases} 3x-3y+2z-11=0, \\ x-y-3z=0. \end{cases}$

808. (1) $\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+4a^2b^2}}$;

(2) $\cos\varphi=\dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$;

(3) $\lambda=\dfrac{2a^2b^2}{2a^2b^2+(a^2+b^2)c^2}.$

809. $\begin{cases} 54x+32y-49z-76=0, \\ 69x-42y+41z+235=0. \end{cases}$

810. l_1: $x=1+8t$, $y=-1+3t$, $z=-1+2t$.

l_2: $x=-1+2t$, $y=2-5t$, $z=-3t$.

811. $3x-3y-z-11=0$.

812. $\begin{cases} x-z-3=0, \\ 8x-6y+8z+41\sqrt{2}=0. \end{cases}$

813. $3x-3y-6z+10=0$ 和 $x+y=0$.

814. $\begin{cases} x-3y+z-1=0, \\ 3x-8z+2=0. \end{cases}$

815. $7x-11y-13z-35=0$.

816. (2) $2x+6y+z+10=0$.

820. 平面。

821. 平面.

830. $\left(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

831. $C_0\left(\frac{11}{14}, -\frac{11}{14}, \frac{11}{14}\right)$, $C_1\left(-\frac{11}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$, $C_2\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{12}, \frac{11}{12}\right)$, $C_3\left(\frac{11}{8}, -\frac{11}{8}, -\frac{11}{8}\right)$, $C_4\left(\frac{11}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

832. $\cos\varphi=-\frac{100}{3\sqrt{22}\cdot\sqrt{273}}$

833. $\begin{cases} x-y-3=0, \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-z+2=0, \\ y=0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2y-z+8=0, \\ x=0. \end{cases}$

834. $\frac{133}{\sqrt{741}}$.

835. $4x+5y-32=0$, $11x+10z-78=0$, $11y-8z-8=0$

836. $2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=0$.

837. $(x+2y+z)^2+4(x-z)^2=16$.

838. $9[2(x-2)+2y-(z+1)]^2$
$$=16[(x-2)^2+y^2+(z+1)^2].$$

839. $(x-y-1)^2+(x-z+1)^2+(y-z+2)^2=6$.

840. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+4xz+8yz+16x+14y$
$$+22z-39=0.$$

842. $(x+y+z)^2+4\left(x-y-\frac{9}{4}\right)=0$.

843. 旋转圆柱面。

844. $\begin{cases}\dfrac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{7}{16}}+\dfrac{y^2}{\frac{63}{8}}=1,\\ z=0.\end{cases}$

846. (1) $\left(x+\frac{5}{2}z\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}z\right)^2=25$;

(2) $\left(y-\frac{3}{5}x\right)^2-\left(z+\frac{2}{5}x\right)^2=4$;

(3) $\left(x-\frac{5}{3}y\right)^2-2\left(z+\frac{2}{3}y\right)=0$.

847. $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=3$.

848. $xy+yz+zx=0$.

849. $(x+4)^2-3y^2-3z^2=0$.

850. $4x-3y-5z+4=0$.

851. $k\neq 1$，Φ 是圆锥面；$k=1$，Φ 是平面
$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=0.$$

852. $y^2+z^2=4ax\ (x\neq 0)$.

853. $36(x+y+z)^2+144(x+y-1)^2-25y^2=0$.

854. $x^2+4y^2-4z^2-4xy-10yz-6x-2y+2z+3=0$.

855. $A^2a^2+B^2b^2\geqslant C^2c^2$.

857. 令

$\Delta_1=\begin{vmatrix} b-y_0 & a_2 \\ c-z_0 & a_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} c-z_0 & a_3 \\ a-x_0 & a_1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} a-x_0 & a_1 \\ b-y_0 & a_2 \end{vmatrix}$. 于是

(1) $\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2<r^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$;

(2) $\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2=r^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$;

(3) $\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2>r^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$.

858. $C(3,-3,1)$; $r=\dfrac{\sqrt{22}}{3}$.

859. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25$.

860. 令 $a^2+b^2+c^2-d=\alpha$. 于是(1) 如果 $\alpha>0$，则 Φ是以点 $C(-a,-b,-c)$为心、以$\sqrt{\alpha}$ 为半径的球面；(2) 如果 $\alpha=0$，则 $\Phi=\{C\}$；(3) 如果 $\alpha<0$，则$\Phi=\varnothing$.

863. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=36$.

865. $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$.

866. $(x+1)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2+(z+2)^2=\dfrac{64}{9}$.

867. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$.

868. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$.

869. $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{75}=1$.

870. $\dfrac{(x-y+1)^2}{32}+\dfrac{(x-y-2z)^2}{24}+\dfrac{(x+y+z-1)^2}{3}=1$.

871. $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{y^2}{\frac{225}{16}}+\dfrac{z^2}{\frac{100}{16}}=1$.

876. $M_0\left(-\dfrac{a^2\cdot A\cdot D}{\alpha},\ -\dfrac{b^2\cdot B\cdot D}{\alpha},\ -\dfrac{c^2\cdot C\cdot D}{\alpha}\right)$,

其中 $\alpha=A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2$.

877. 直线。

881. $Ax+By+Cz+D'=0$,

其中 $D'=\pm\sqrt{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}$，而$D'$ 的符号这样选

即 使 $DD'<0$.

882. $6x-3y+2z$ [illegible] $=0$.

883. (1) $D>0$; (2) $D=0$; (3) $D<0$, 其中

$$D=\left(\frac{a_1x_0}{a^2}+\frac{a_2y_0}{b^2}+\frac{a_3z_0}{c^2}\right)^2-\left(\frac{a_1^2}{a^2}+\frac{a_2^2}{b^2}+\frac{a_3^2}{c^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right).$$

884. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{(z-3)^2}{1}=0$——二次锥面。

885. $\left(\frac{a_1^2}{a_2^4}x^2+\frac{b_1^2}{b_2^4}y^2+\frac{c_1^2}{c_2^4}z^2\right)-\left(\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}+\frac{z^2}{c_2^2}\right)^2=0$.

886. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{5}=1$.

887. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$.

888. 当$e<1$,Φ是旋转椭圆面;当$e>1$,Φ是旋转双叶双曲面。

889. $x^2\pm(y^2-z^2)-1=0$.

890. 单叶双曲面。

891. 单叶双曲面。

894. $\left(-\frac{Aa^2D}{\alpha},\ -\frac{Bb^2D}{\alpha},\ -\frac{Cc^2D}{\alpha}\right)$.

898. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

900. $\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1,\\ \frac{x}{5}+\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=1.\end{cases}$ $\begin{cases}3x-5y=0,\\ z=2.\end{cases}$

902. $\left(-\frac{Aa^2D}{\alpha},\ \frac{Bb^2D}{\alpha},\ \frac{Cc^2D}{\alpha}\right)$, 如果

$$\alpha=A^2a^2-B^2b^2-Cc^2\neq0.$$

903. 如果$\alpha>0$, $D^2\neq\alpha$,椭圆或虚椭圆;如果$\alpha>0$, $D^2=\alpha$, 且是切平面;如果$\alpha<0$, 双曲线;如果$\alpha=0$, $D\neq0$, 抛物线;

如果$\alpha=0$，$D=0$，一对虚的平行直线，其中

$$\alpha=A^2a^2-B^2b^2-C^2c^2.$$

905．（1）旋转椭圆面；（2）旋转双叶双曲面。

907．旋转抛物面。

908．双曲抛物面。

909．旋转抛物面。

910．双曲抛物面。

912．$x-y+z-\frac{5}{2}=0$，

l_1：$\begin{cases}2x-12y-3z=0,\\2x+3z-6=0;\end{cases}$

l_2：$\begin{cases}10x-12y+15z=0,\\2x-3z-30=0.\end{cases}$

913．l_1：$\begin{cases}x+2y-2z=0,\\x+2y-16=0;\end{cases}$

l_2：$\begin{cases}x+2y-8=0,\\x-2y-4z=0.\end{cases}$

914．一对互相垂直的直线。

915．$pA^2+qB^2=2CD$.

917．双曲抛物面。

921．

(1) $(0,\frac{1}{2},0,\frac{5}{2})$，$(-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5},\frac{13}{5})$，$(5,13,-5,0)$；

(2) $(0,-\frac{5}{2},\frac{9}{2},-\frac{7}{2})$，$(\frac{5}{3},0,\frac{1}{3},-1)$，

$(\frac{9}{5},\frac{1}{5},0,-\frac{4}{5})$，$(\frac{7}{3},1,-\frac{4}{3},0)$.

923．$x^1=2+\lambda^1+\lambda^2$，$x^2=\lambda^1+2\lambda^2$，$x^3=1+2\lambda^1+\lambda^2$，$x^4=\lambda^1-2\lambda^2$，$x^5=-1+\lambda^1+3\lambda^2$

或$\begin{cases}3x^1-x^2-x^3-5=0,\\4x^1-3x^2-x^4-8=0,\\x^1-2x^3+x^5-1=0.\end{cases}$

924. $M(-2,1,0,3)$.

925. (1)是；(2) 否。

928. (1) 平行；(2)重合；(3)相错；(4)相交于点(1,1,1,1)。

929. $(1,2,-3,0)$, $(0,-1,1,-2)$, $(-1,-4,5,-4)$.

930. $x^1=1+\lambda^1-\lambda^2$, $x^2=-2+3\lambda^1$, $x^3=3-3\lambda^1-2\lambda^2$,
$x^4=-1+2\lambda^1+\lambda^2$.

931. $x^1=1+\lambda^1-2\lambda^2$, $x^2=3-3\lambda^2$, $x^3=-1+2\lambda^2$,
$x^4=4-5\lambda^2$, $x^5=5-4\lambda^2$.

936. $(5,2,-4,-3)$，$(0,1,1,7)$.

940. (1) $\varnothing$；(2) 点$(2,-1,4,5)$.

943. Π_2和Π_2'相错。

946. $x^1-3x^2-2x^3+3=0$,
$3x^2+2x^3-x^4-4=0$,
$x^1+x^2-3x^3+x^4=0$.

948. $\Pi_1' \parallel \Pi_2$.

962. (1) $M_1\left(\frac{9}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right)$；

(2) $M_1\left(1,-\frac{1}{2}, 2,-\frac{3}{2}\right)$.

963. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$；(2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

964. $\left(-\frac{16}{15}, \frac{16}{15}, \frac{43}{15}, -\frac{42}{15}\right)$.

965. $(1,-2,2,2)$.

966. (1) $\frac{\sqrt{1022}}{7}$；(2) $\sqrt{15}$.

967. (1) $\dfrac{\sqrt{465}}{6}$, (2) $\dfrac{\sqrt{670}}{10}$.

968. (1) $\sqrt{\left(\dfrac{216}{98}\right)^2+\left(\dfrac{297}{98}\right)^2+\left(\dfrac{243}{98}\right)^2+\left(\dfrac{378}{98}\right)^2}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{2131}}{73}$.

969. (1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{402}$; (2) $\dfrac{9}{2}$.

970. $\left(\dfrac{57}{74},\ \dfrac{229}{74},\ \dfrac{149}{74},\ \dfrac{23}{74}\right)$.

971. (1) $x^1=1$, $x^2=1+\lambda$, $x^3=1+\lambda$, $x^4=1+\lambda$.

976. $y^1=-x^2+2x^3-2x^4+5$, $y^2=-x^1-2x^3+2x^4+1$, $y^3=2x^1-2x^2+3x^3-4x^4+4$, $y^4=-2x^1+2x^2-4x^3+3x^4-6$.

984. $\left[\dfrac{1}{6}(5(a_{13}^2+a_{14}^2+a_{15}^2)-2(a_{34}^2+a_{35}^2+a_{45}^2)+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{25}^2)-\dfrac{1}{4}a_{12}^2\right]^{\frac{1}{2}}$, 其中$a_{ij}$是棱$[A_iA_j]$的长。

985. $\dfrac{1}{3}(a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{15}^2-a_{23}^2-a_{24}^2-a_{25}^2-a_{34}^2-a_{35}^2-a_{45}^2)^{\frac{1}{2}}$.

1002. 设$(M_1M_2)\perp\Pi_p$, $M_2\in\Pi_p$. 于是有$\rho(M_1,\Pi_p)=|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 记$V''=V'+\tilde{V}$, 其中$\overrightarrow{M_1M_2}$生成空间$\tilde{V}$. 求出$\vec{b}=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p]\in V''$, 并且$\vec{b}\perp\vec{a}_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=|\text{射影}_{\vec{b}}\overrightarrow{M_0M_1}|=\frac{|\vec{b}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{b}|}=\frac{|(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_p,\overrightarrow{M_0M_1})|}{|[\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_p]|}$$

或$\rho(M_1,\Pi_p)=\sqrt{\dfrac{G(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_p,\overrightarrow{M_0M_1})}{G(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_p)}}$.

1003. $\sqrt{\dfrac{244}{35}}$.

1004. $\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{\sum a_i^2}}$.

1005. $\dfrac{5}{\sqrt{13}}$.

1006. (1) $x'=\dfrac{1}{3}(x-2y-2z)+1$,

$$y'=\frac{1}{3}(-2x+y-2z)+1,$$

$$z'=\frac{1}{3}(-2x-2y+z)+1;$$

(2) $x'=\dfrac{1}{3}(x-2y+2z)+\dfrac{2}{3}$, $y'=\dfrac{1}{3}(-2x+y+2z)+\dfrac{2}{3}$,

$$z'=\frac{1}{3}(2x+2y+z)+\frac{2}{3}.$$

1008. (3) $x'=\dfrac{1}{3}(x+2y-2z)+2$,

$$y'=\frac{1}{3}(2x-2y-z)-3,$$

$$z'=-\frac{1}{3}(2x+y+2z)+1.$$

1012. 将所给的变换缩小到垂直于直线 a 的平面上来讨论。

1021. $\varphi(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{1}{2}(\varphi(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})-\varphi(\vec{x},\vec{x})-\varphi(\vec{y},\vec{y}))$

1022. (1) 4, (2) 2, (3) 4.

1023. (1) $\varphi(\vec{x},\vec{y})=-2$, (2) $\varphi(\vec{x},\vec{y})=1$, (3) $\varphi(\vec{x},\vec{y})=2$.

1025. $\varphi(\vec{x},\vec{y})$是反对称形式。

1026. 利用不等式：

$$\varphi(\overrightarrow{p_1}+\lambda\overrightarrow{p_2},\overrightarrow{p_1}+\lambda\overrightarrow{p_2})>0,\ \forall\lambda\in R.$$

1027. 两个解（二实的、二虚的、重合），如果$\varphi(\vec{b},\vec{b})\neq0$；唯一解，如果$\varphi(\vec{b},\vec{b})=0$，$\varphi(\vec{a},\vec{b})\neq0$；解组不存在，如果

$\varphi(\vec{b},\vec{b})=\varphi(\vec{a},\vec{b})=0$, $\varphi(\vec{a},\vec{a})\neq 0$；$\lambda$ 是任意的数，如果 $\varphi(\vec{a},\vec{a})=\varphi(\vec{a},\vec{b})=\varphi(\vec{b},\vec{b})=0$。

1028．应用习题1027的结果。

1029．$a>0$, $a-b>0$, $a+(n-1)b>0$.

1032．$(\bar{x}^1)^2-(\bar{x}^2)^2+(\bar{x}^3)^2$.

1033．$(\bar{x}^1)^2+(\bar{x}^2)^2-(\bar{x}^3)^2-(\bar{x}^4)^2$.

1034．(1) $3(\bar{x}^1)^2+2(\bar{x}^2)^2$; (2) $(\bar{x}^1)^2+2(\bar{x}^2)^2+3(\bar{x}^3)^2$;

(3) $(\bar{x}^1)^2+(\bar{x}^2)^2-2(\bar{x}^3)^2$; (4) $3(\bar{x}^1)^2+6(\bar{x}^2)^2-2(\bar{x}^3)^2$;

(5) $3(\bar{x}^1)^2-3(\bar{x}^2)^2$.

1038．设 $M_1(x_1{}^i)$ 和 $M_2(x_2{}^i)$ 是关于已知椭圆的内点。证明：

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_1{}^i+(1-\alpha)x_2{}^i)^2<1,\ 0<\alpha<1,$$

即每一点 $M\in[M_1M_2]$ 都是关于已知椭圆的内点。

1041．(1) $C(1,1,-1)$；(2) 中心所在直线：

$$x^1=1,\ x^2=t, x^3=-t.$$

1049．$\varphi(\overrightarrow{AM})=0$.

1054．$\vec{k}$, $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{i}-\vec{j}$.

1055．$x-y=0, x+y-z=0, 3x+3y+6z-2=0$.

1056．(1) $\dfrac{x^2}{\frac{5}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{5}{8}}-\dfrac{z^2}{\frac{5}{2}}=1$;

(2) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{z^2}{3}=-1$;

(3) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

1059．利用标架 $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_n})$.

1060．参看习题1059的提示。

1062．证明：如果 $X, Y\in F, X\neq Y$，则

$$\Delta XAY\in A(F).$$

1064．首先对 $n=2,3$ 进行证明。

1065．利用这样一个事实：如果线段 $[A'B']\subset\Phi'$，则它的中心射影在平面 Π：$[AB]\subset\Phi$ 上.

1066. 参看习题1065的提示。

1067. 先对 $n=2,3$ 进行证明。

1068. 只须讨论 F_0 是凸多边形的情况就足够了。

1071. 利用习题1062。

1073. 利用习题1062。

1074. 参看习题1062。

1077. $S=\sqrt{3}a^2, V=\frac{\sqrt{2}}{13}a^3$, $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$, $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$, $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$.

1078. $S=2\sqrt{3}a^2$, $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$, $r=\frac{\sqrt{6}}{6}a$, $R=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

1079. $S=3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ a^2$, $V=\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$,

$r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ a$, $R=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}a$, $\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}}}$.

1080. $S=5\sqrt{3}a^2$, $V=\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$,

$r=\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a$, $R=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}a$, $\varphi=2\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$.

1081. 要注意到正二十面体侧面的中心是正十二面体的顶点。

1082. 利用这样一个事实：接着立方体的每条棱以适当的方法添造正五边形，就能得到正十二面体的边界。

1095. $F_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$, $F_2^2=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\}$.
二向量 $(\bar{1},\bar{0})=\vec{a}_0$, $(\bar{0},\bar{1})=\vec{a}_1$ 构成向量空间 F_2^2 的基底，$(\bar{0},\bar{0})=\vec{O}$, $(\bar{1},\bar{1})=\vec{a}_0+\vec{a}_1=\vec{e}$. 根据共线关系，商集 $(F_2^2\setminus\{\vec{O}\})/\Delta$ 由三个元素组成：$A_0=\{\vec{a}_0\}$, $A_1=\{\vec{a}_1\}$, $E=\{\vec{e}\}$. 因此

$$P(F_2^2)=\{A_0,A_1,E\}.$$

1096. $\dim P(V)=2\Longrightarrow\dim V=3$. 设 $(\vec{a}_0,\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ 是向量空间 V 的基底。于是诸向量 $\vec{a}_0$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_0+\vec{a}_1$, $\vec{a}_0+\vec{a}_2$, $\vec{a}_1+\vec{a}_2$,

$\vec{a}_0+\vec{a}_1+\vec{a}_2$ 两两不共线并且生成射影空间$P(V)$的七个不同的点。

1097. 向量空间 F_2^3 只含有七个两两不共线的非零向量。

1098. 七条。

1099. 以三维空间的基底向量及它们的和所生成的点，具有要求的性质。

1101. 四个点。

1103. $p+1$.

1104. 十五个。

1106. 在直线 $\bar{d}$ 到线束$P(O)$ 的透视映射下，点$E_\infty\in\bar{d}$ 的象是直线 $d_0\in P(O)$. $d_0\| d$.

1107. $X_\infty(-1,1)$.

1110. 设$(\vec{a}_0,\vec{a}_1)$ 是由标架 R 生成的向量空间的基底，以及 $\overrightarrow{OE}=\vec{a}_0+\vec{a}_1$.于是

$\overrightarrow{OA_0}=\alpha\vec{a}_0$, $\overrightarrow{OA_1}=\beta\vec{a}_1$, $\overrightarrow{OM}=\gamma x^0\vec{a}_0+\gamma x^1\vec{a}_1$.

$$(A_0A_1,E)=t\Longrightarrow\overrightarrow{A_0E}=t\overrightarrow{EA_1}\Longrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=t; \qquad (1)$$

$$(A_0A_1,M)=\lambda\Longrightarrow\overrightarrow{A_0M}=\lambda\overrightarrow{MM_1}\Longrightarrow\frac{x^0}{x^1}=\frac{\alpha}{\lambda\beta}; \qquad (2)$$

$$(1),\ (2)\Longrightarrow\frac{x^0}{x^1}=\frac{t}{\lambda}.$$

1111. 设各点 A_0, A_1, E 都是本义的，$\overrightarrow{OE}=\vec{a}_0+\vec{a}_1$ 和$R'=(O',\vec{a}_0{}',\vec{a}_1{}')$ 是仿射标架，与射影标架 (A_0,A_1,E) 有密切关系的，比如R 也一样，但具有另外的原点。过点 O' 并以向量

$$\overrightarrow{x^0}a'_0+\overrightarrow{x^1}a_1'$$

为方向向量的直线，是直线(OM')在仿射变换

$$f\,|\,f(R)=R'$$

下的象。在变换 f 下，点 A_0,A_1 是不动点，因此(A_0A_1) 是由不动点组成的直线。因而，如果 $(OM')\cap d=M$，则 $f(OM')\ni M$；如果$(OM')\parallel d$，则$f((OM'))\parallel d$，即扩大直线(OM')和 $f((OM'))$ 都过同一个非本义点 $M\in\bar{d}$.

分别讨论当 A_1 或 A_0 [illegible] E 是非本义点的情况。

1112．利用习题111[illegible]。

1113．$P=(A_2M)\cap(A_1N)$．

1115．点 M 从中心 A_2 向直线 (A_0A_1) 上的射影是线段 (A_0A_1) 的中点，点 M 由中心 A_0 向直线 (A_1A_2) 上的射影是该直线的非本义点。

1116．变成仿射坐标。

1119．$A_2\in(AB)$．

1120．$M\in(A_0A_1)$．

1121．点 A,B，C 在一条直线上，当且仅当由它们生成的各向量线性相关。

1123．证明：方程

$$(\lambda a_\alpha+\mu b_\alpha)x^\alpha=0$$

确定一条过点 $C=a\cap b$ 的直线，而每条过点 C 的直线都由这样的方程所确定。

1124．作出已知直线与坐标三角形两边的交点。

1125．l 是非本义直线。

1126．$(-\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{C})$ 在生成标架 R 的基底下，其中有：$\vec{A}=(1,0,-1)$，$\vec{B}=(2,1,0)$，$\vec{C}=(0,0,1)$．

1127．(1) $\lambda x^0=y^0+2y^1$，(2) $\lambda x^0=-y^0+2y^1$，

$$\lambda x^1=\qquad y^1,\qquad\qquad \lambda x^1=\qquad y^1,$$

$$\lambda x^2=-y^0+y^2;\qquad\qquad \lambda x^2=y^0+\quad y^2.$$

1128．$M(3,2,-1)$，$N(12,9)$，$X_\infty(5,0,-3)$，$P(0,1,1)$．变成关于标架 $\bar{R}$ 的齐次仿射坐标，并写出从标架 $\bar{R}$ 变到标架 R' 的坐标变换公式。

1129．$X_\infty(1,-1,0)$，$Y_\infty(1,0,-1)$，$Z_\infty(0,1,-1)$ 是坐标三角形各边上的非本义点，$M_\infty(-2,1,1)$，$N_\infty(1,-2,1)$，$P_\infty(1,1,-2)$ 是它的各条中线的非本义点。

1132．作出有一个透视中心、并且使 $M,N\in p$，$M',N'\in q$，$(MP)\cap(M'P')=A$ 的两个三角形 MNP 和 $M'N'P'$。

1133. 取直线 p 和 q，u 和 v 作为笛沙格三角形的对应边。问题就化成了习题1132。

1134. 参看习题1132。

1135. 取不可及直线 (AB) 作为两个笛沙格三角形的透视轴，其中一个以 p，u，t 为边，与这些边相对应的另一个三角形的边分别是 q，v，s，其中直线 s 即为所求。

1136. 化成习题1134。

1137. 就三点形 DMN 和 CPQ 应用笛沙格定理。

1138. 两个三角形 AMN 和 DPQ 具有一个透视中心。

1140. 三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 是以 E 为透视中心，以 (NP) 为透视轴的两个笛沙格三角形。三角形 CA_1B_1 和 $C_1A_2B_2$ 也有同样的透视中心和透视轴。因此直线 (A_2B_2) 过点 $(A_1B_1)\cap(NP)=M$。这就是说，诸条接线 (AB)，(A_1B_1)，(A_2B_2) 都过点 M。可以类似地证明：$(A_3B_3)\ni M$，等等。

1141. 在标架 $R:=(M_0, M_1, M_2)$ 下，求点 M 的坐标。在标架 $R:=(M'_0, M_1', M_2')$ 下，点 M' 有同样的坐标。在标架 R' 下，求它的坐标。

1146. 先将标架顶点 A_0，A_1 安置在不动点处，然后再写出射影变换公式。

1148. 射影变换由标架 $\tilde{R}=(A_0, X_\infty, E)$ 和 $f(\tilde{R})=(A_0', X_\infty', E')$ 所给定。

1149. 设在映射 f 下，相对应的三个直线对相交于直线 s 的各点处。证明：以 s 为轴的透视映射 g：$P(O)\to P(O')$ 与 f 重合。

1150. 透视映射 g: $P(O)\to d$ 与 f 重合。

1151. 引用线束 $P(O)$ 到不过点 O 的直线 d' 上的辅助透视映射。

1152. 化成习题1141。

1153. 由标架 $R=((AC),(AA'),(AB'))$ 和标架 $R'=((CA),(CA'),(CB'))$ 所确定的映射

$$f: P(A) \to P(C)$$

是透视映射。它诱导出以 L 为中心的透视映射

$$\varphi: (BA') \to (BC'),$$

该映射使 $\varphi(M)=K$，这就是说 $L \in (MK)$。

1155．射影变换由二标架 $\tilde{R}=(A_0, X_\infty, Y_\infty, E)$ 和 $f(\tilde{R})=(A_0', X'_\infty, Y_\infty', E')$ 所给定。

1156．射影变换 f 由二标架 $R=(A,B,C,D)$ 和 $R'=(A,B,C,D')$ 所确定。作出点 M 在坐标三角形 ABC 三边上射影的象。

1158．(1) $\lambda y^0=2x^0+6x^1,$

$\lambda y^1=x^0-9x^1.$

1160．当循环交换不同点 A,B,C,D 时，

$$(AB,CD)=t \to \frac{t}{t-1} \to t \to \frac{t}{t-1}.$$

1161．利用交比定义。

1162．$t, \frac{1}{t}, \ 1-t, \ \frac{1}{1-t}, \ \frac{t-1}{t}, \ \frac{t}{t-1}.$

1163．$(AC, BD)=-1.$

1164．讨论以 B 为中心的透视映射

$$f: m \to (AC)$$

和以 M 为中心的透视映射

$$g: (AC) \to (AB)$$

的合成。

1166．$(AB, CD)=-1.$

1169．利用习题1107，1167．

1170．$C(1, -1)$．

1172．利用习题1171．

1174．直线 d 是两个笛沙格三角形 $A_0A_1A_2$，$E_0E_1E_2$ 的透视轴。讨论完全四点形 $EE_0E_1A_2$ 得到 $(A_0A_1, E_2M_2)=-1$．在标架 R 下，直线 d 具有坐标 $(1, 1, 1)$．

1175．在扩大平面上，讨论一个这样的完全四点形，它的顶

点是已知平行四边形的顶点。

1178．在扩大平面上，讨论以梯形顶点为顶点的完全四点形。

1179．写出射影变换公式，再将标架的一个顶点安置在不动点处。

1180．直线 d 的射影变换 f，由一个标架对 $R=(A,A',B)$ 和 $R'=(A',A,B)$ 所给定。

1181．证明：变换 f 保持任意四点的交比不变。

1182．参看习题1181的提示。

1184．椭圆对合。

1185．$X(1,1)$，$Y(-1,\ 2)$．

1187．作出在**奇异透射**变换下的三角形的象。

1188．$x^1=0$ 是不动点的直线。

1189．(1) 作出某一点 $M\in(AA')$ 的象 M'，并且作出由中心 S、轴 s 和两个点 M 与 M' 给出的透射 f．

1190．作出直线 d 的两个点的象（原象）。取点 $d\cap s$ 作为其中的一个点是有益的。

1191．$X=p\cap f^{-1}(q)$．

1192．证明：以 S 为中心，s 为轴的将 A 变成 A' 的透射 g 与 f 相同。

1193．三角形 ABC 和$A'B'C'$ 满足笛沙格定理。因此诸点

$$(AB)\cap(A'B'),\ (BC)\cap(B'C'),\ (AC)\cap(A'C')$$

在一条直线上，该直线是以 S 为中心的透射 f 的轴 s。作出直线 s，我们就将此题化为习题1191。

注意．直线 $f^{-1}(q)$ 也可不利用透射轴来作出：

$$q\cap(A'B')=M',\ q\cap(B'C')=N';$$

$$(SM')\cap(AB)=M=f^{-1}(M'),$$

$$(SN')\cap(BC)=N=f^{-1}(N');$$

$$(MN)=f^{-1}(q);$$

$$(MN)\cap p=X,(SX)\cap q=X'=f(X).$$

1194．参看习题1193的提示。

1195. 对两个亲似变换的轴之交点 M 有：

$$f_1(M)=f_2(M)=M\Longrightarrow M\in x.$$

取任意一条直线 n . 点 $N'=f_1(n)\cap f_2(n)$ 对二变换有同一原象 $N\in n$、直线 $(MN)=x$ 即为所求。

如果变换 f_1 由一个亲似三角形对 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 所给定，而变换 f_2 由另一个亲似三角形对 EFG 和 $E_2F_2G_2$ 所给定，则直线 x 可用下述方式求出：作出点 $S\in(EF)\mid f_1(S)\in(E_2F_2)$、及点 $T\in(GF)\mid f_1(T)\in(G_2F_2)$。此时直线 $(ST)=x$，即为所求。

1196. 透射由标架对 (R,R') 所确定，其中 M_1 是不动点。

1197. 作出非本义点 $X'_\infty=p\cap q$ 的原象 X，二直线 (XP) 和 (XQ) 即为所求，其中 $P=p\cap s$，$Q=q\cap s$.

1198. 作出已知各条平行直线的非本义点的象。

1199. 作出不在透射轴上的任何一个非本义点的象和原象。所求的诸直线过所求的点并且平行于透射轴。

1200. (1) 透射中心由条件(*)唯一确定。

(2) 作出点 $M'=f(M)$. 以点 $T_0=(AM)\cap s$ 为中心的透视映射 φ：$(SA)\to(SM)$，保持四点交比不变，因而：
$(SM_0, MM')=(SA_0, AA')=-1$.

(3) 设 f 是平面的对合射影变换、以及 $f(A)=A'\neq A$. 取点 $B\notin(AA')$，于是 $f(B)=B'\notin(A'A)$. 有两种可能的情况：

(a) 设 $B'\neq B$. 那末 $D=(AA')\cap(BB')$，$C=(AB)\cap(A'B')$，$E=(AB')\cap(A'B)$，$F=(CE)\cap(AA')$ 是不动点，而 (CE) 是不动点直线。因此 f 是以 (CE) 为轴、D 为中心的透射，并且 $(DF, AA')=-1$，这就是说 f 是调和透射。

(b) 设 $B'=B$. 取点 $M\in(AB)$、$M\neq A$，$M\neq B$. 于是 $f(M)=M'\in(A'B)$。而后边的讨论与情况 (a) 一样。

1201. $\lambda y^0=x^0-2x^1-2x^2$,

$\lambda y^1=-2x^0+x^1-2x^2$,

$\lambda y^2=-2x^0-2x^1+x^2$.

1202. 要注意到亲似变换保持直线的平行性。

1203. 设 Q 是已知圆、d_∞ 是非本义直线，于是

$$f^{-1}(d_\infty)\cap Q=\varnothing \Longrightarrow f(Q)\text{是椭圆，}$$

$$f^{-1}(d_\infty)\cap Q=M \Longrightarrow f(Q)\text{是抛物线，}$$

$$f^{-1}(d_\infty)\cap Q=\{M,N\},\ M\neq N \Longrightarrow f(Q)\text{是双曲线。}$$

1204. 取一条与已知椭圆之切线 d 平行的直线作为透射 f 的轴，透射中心和二点 $A, A'=f(A)$ 这样来选取，使直线 d 是非本义直线的原象。要得到双曲线，取与已知椭圆相交于两点的直线 d，而要得到椭圆，直线 d 不应和已知椭圆有公共点。

1205. 参看1204题的提示。

1206. 利用将直线 (ST) 变成非本义直线的扩大平面的射影变换。

1207. 变成齐次仿射坐标。

1209. 利用习题1208。

1210. 作出已知直线的两个点的极线。

1211. 作出点 M 的极线。

1212. 应用配极对偶定理。

1214. 所指出的各条切线的交点在点 A 的极线 a 上。特别是，属于直线 (AO) 的那条直径两端点处的圆 Q 之两条切线的非本义交点在直线 a 上。

1215. 参看1214题的提示。

1217. 所指诸切线的交点在非本义极点 A_∞ 的极线 a 上，点 A_∞ 是诸平行弦所在各直线的交点。而直线 a 过各平行弦的中点。

1218. 证明：点 C 的极线和直线 (MN) 相交于非本义点 L_∞，并且 $(PQ, CL_\infty)=-1$。

1219. 设 A, B 是已知曲线 Q 和 Q' 的两个切点；M 是 Q 和 Q' 在点 A 与 B 处的两切线之交点；$D\in(AB)$ 是两曲线 Q 和 Q' 的外点；d 是点 D 的极线；$C\in Q\cap d$，$C'\in Q'\cap d$。以 M 为中心、(AB) 为轴和以 C 与 $f(C)=C'$ 为对应点的透射 f，把 Q 变成 Q'。

1220. 对于两条曲线，点 D 的极线都一样。

1221．设场地围墙所确定的圆 Q 以点 O 为圆心。

如果 $A=O$，则所求的方向是任意的。如果$A\in Q$，则问题归结为作一个以 A 为顶点的内接于圆 Q 的正三角形。

设 $A\neq O$，$A\notin Q$．显然的解法是：取直线 (AO) 所确定的两个相反方向。

如果球经围墙反射的两个点 B、B_1 不在 (AO) 上，则$\triangle ABB_1$是等腰的．$[AB]\cong[AB_1]$．设 $C=(AO)\cap(BB_1)$．过点 A 引垂直于 (AO) 的弦 $[DD_1]$，并且作出我们要讨论的点：$E\in(DC)\cap Q$、$E_1\in(D_1C)\cap Q$．再来分析完全四点形 DD_1EE_1，我们可以断定：(BB_1) 是点 $T=(DE_1)\cap(D_1E)$ 的极线，这也就是说 (TB) 是圆 Q 在点 B 处的切线。$((BA),(BC);(BO),(BT))=-1$（参看习题1172）．因此 $(AC,OT)=-1\Longrightarrow((EA),(EC);(EO),(ET))=-1\Longrightarrow(AD,KD_1)=-1$，其中$K=(EO)\cap(DD_1)$，因为$(AD,D_1)=-\frac{1}{2}$，所以$(AD,K)=\frac{1}{2}$．最后我们能作出点$K$并且找到：点$E\in(OK)\cap Q$，$E\in[(DD_1),O)$，点$C=(ED)\cap(AD)$，而终于找到了点$B$、$B_1$，它们是点过$C$并垂直于 (AO) 的直线与圆 Q 的交点。

1222．应用斯丹纳或帕斯卡定理。

1223．参看1222题的提示。

1224．参看1222题的提示。

1225．应用布利安雄定理。将其中一条切线的切点作为所求曲线的一个点。

1226．参看1225题的提示。

1227．参看1225题的提示。

1228．椭圆 Q 在点A 和B处的切线平行于直径(CD)，而在点C和D 处的切线平行于直径(AB)．应用帕斯卡或布利安雄定理。

1229．应用斯丹纳定理的推论。

1230．应用布利安雄定理。

1231．应用帕斯卡定理。

1232．平行四边形各边的中点位于其内切椭圆上。应用布利

安雄定理。

1233．平行四边形各边的中点在其内切椭圆上。应用帕斯卡定理。

1234．利用圆关于圆心对称，不过圆心 O 作两条平行割线，它们与 l 相交于点 A 和 B．然后过点O 作与它们平行的直线（参看1177题）。它与线段〔AB〕相交于其中点 C．利用点 A，B，C，过点 P 引平行 l 的直线（参看1176题）。

1235．作出任意线段〔AB〕$\subset l$ 的中点（参看1234题的提示）。利用该图形，过点 O 作直线 $m \| L$．作出任一点 $N \in m$ 的极线n，点 N 在 Q 的外部。于是 $n \perp m$、以及点 $N_0 = n \cap m$ 是线段〔N_1N_2〕的中点，其中$\{N_1, N_2\} = n \cap Q$．最后，过点 P 作直线 $p \| n$．

1236．60．

1237．60．

1238．六角形点顶点在一条二次卵形（圆锥）曲线上。过其对边中点的诸直线，属于以非本义直线的极点为中心的一线束。

1239．对六点形应用帕斯卡定理，该六点形的顶点是二已知三角形的顶点。可以证明：该六点形对边交点之一，是一六边形的布利安雄点，该六边形的各边是已知三角形各边所在直线。应用布利安雄逆定理。

1240．参看1239题的提示。

1241．在点 A 和 B 处作已知曲线 Q 和 Q' 的切线。用 X 表示点 A、$B \in Q$ 处的二切线的交点，而用Y 表示点 A、$B \in Q'$处的二切线的交点。找到点 $R = (XY) \cap (AB)$ 并作出点 $S \mid (AB, RS) = -1$．于是(XY)是点 S 关于这两条曲线的极线。记$T = (XY) \cap (SC)$ 并作出点 $D \mid (ST, CD) = -1$．故 $D \in Q \cap Q'$．

1242．在双曲线的非本义点处与它相切的切线。

1243．在扩大平面上，双曲线的渐近线是其非本义点的切线。所以由该题条件已给出了二次卵形线（圆锥曲线）的三个点，以及在其中两点处的两条切线。应用帕斯卡定理。

1244．参看1242题的提示。

1245. 将双曲线的中心当作是其渐近线的交点去求，而渐近线是双曲线在其非本义点处的切线.

1246. 已知点关于双曲线中心的对称点，属于已知的双曲线。因此，已经知道了卵形（圆锥）曲线的五个点（其中一个点是非本义点）及在其中两点处的两条切线（其中之一是渐近线）。应用帕斯卡定理，在非本义直线上可找出双曲线的一个点。这个点和双曲线的中心在所求的渐近线上.

1247. 在扩大平面上的诸平行直线相交于非本义直线的一个点处，而该非本义直线是抛物线的切线。

1248. 在扩大平面上，非本义直线是二次卵形（圆锥）曲线的所给切线的第五条。应用布利安雄定理。

1249. 在扩大平面上，非本义直线在抛物线的中心与抛物线相切。应用布利安雄定理。

1250. 在扩大平面上，抛物线的直径给出它的中心——非本义直线的切点。应用帕斯卡定理。

1252. 设 d_0 是扩大仿射平面的射影模型上的非本义直线。点 $C\in(AB)$ 作为各点 $X=(AB)\cap d_0$、A、B 的第四调和点，就能求得；点 D ——作为各点 C, X, B的第四调和点去求，等等。

根据下述理由可简化此作法。任取一个点$Y\in d_0$，$Y\neq X$，再作一条直线 $(XM)\neq(AB)$，设

$$(XM)\cap(AY)=M,\quad (XM)\cap(BY)=N.$$

于是图形 $ABNM$ 是扩大平面的射影模型上的平行四边形。再求：

$$(BM)\cap d_0=Z,\quad (ZN)\cap(AB)=C.$$

这时图形 $BCNM$ 又是一个平行四边形，也就是说，B是线段$[AC]$的中点。要注意：此种作法的点 C 是寻常作法中、利用完全四点形 $MNYZ$ 的各点B, X, A 的第四调和点。

其次，可按下述步骤来作出点 D：

(a) $(CY)\cap(MN)=Q$，$(ZQ)\cap(AB)=D$；

(b) $(CM)\cap d_0=U$，$(UN)\cap(AB)=D$.

直线 (AB) 的其次各点可类似地去作。

1253．过圆 Q 的圆心 C 引直径 $[AB] \| (MN)$，并过点 A 和 B 引平行于直线 (CK) 的两直线。

1254．两直线 d 和 a 的二非本义点关于单位圆 Q 成配极共轭。

1255．参看1252题的解法。点 Z 和点 X 关于单位圆 Q 应该是配极共轭。

1256．设 Q 是以点 C 为圆心的单位圆。作一个等腰三角形 ABC，使其两腰平行于已知角的两边，并作出底边 $[AB]$ 的中点 M．所求的角平分线与直线 (CM) 平行。

1257．设 Q 是以点 C 为圆心的单位圆。作直径 $(CX) \| (MN)$，并作出与它共轭的直径 (CY)．在欧氏平面的射影模型上有 $(CX) \perp (CY)$．过点 M 和 N 作与直线 (CY) 平行的直线 m 和 n．作以 M 为顶点、$[MN]$ 为一边的直角之平分线(参看1256题的解法)。它与直线 n 的交点为所求正方形 $MNST$ 的第三顶点 S．

1258．作直线 $(MP) \| l$，角 PMN 的平分线以及该角分线的垂线 (NP)．

1259．具有非本义中心的对合透射，非本义点为极点、单位圆的对称轴为极线所建立的配极性质。

1261．所求的点位于两圆的交点处，该两圆与已知两圆同心。

1262．应分两种情况讨论：(1) 三条直线两两相交；(2) 两条直线平行、而第三条与它们相交。

1264．化为1263题（以 $2p$ 为底、$90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ 为顶角、h_a 为高线作三角形）。

1265．首先证明：从内切圆的圆心看三角形的各边所成的角，其值等于90°加上该边所对顶角之半。

1268．本题归结为作 $[AC]$ 的中点 D，如果有 $[BC] \cong a$.

1269．利用阿波罗尼圆。

1270．参看1269题的提示。

1271．完成所求三角形以至平行四边形 $ABCD$ 的作图，问

题都归结为作出点 B.

1272. 利用阿波罗尼圆。

1273. 问题归结为作出三角形 ACA' 的顶点 C，在此三角形里有 $[AA']\cong 2[AB]$ （B 是 $[AA']$ 的中点），$[AB]$和 $[BC]$ 是所求平行四边形的已知两边，而比值 $|AC|:|A'C|$ 等于给定值。

1274. 设 $ABCD$ 是所求的平行四边形。点 C 是阿波罗尼圆与半径为 $r=\frac{1}{2}|AC|$，圆心是 $[AC]$ 中点的圆之交点。

1276. 利用图形

$$F=\{M \mid |BM|^2-|CM|^2=|m|^2\},$$

其中 B 和 C 是已知点，而 m 是已知直线。

1278. 所求圆之圆心是二圆 (A,r)和 $(B,\sqrt{r^2+l^2})$的交点。

1279. 参看1276题的提示。

1280. 已知 R 和$\hat{A}$，容易作出 $[BC]$. 其次再利用图形

$$F=\{M \mid |BM|^2+|CM|^2=|l|^2\}.$$

1282. 利用平移其中一条对角线。

1284. 运用平移其中一条中线的方法，将问题归结为作一个三角形，该三角形各边之长是所求三角形各中线之长的$\frac{2}{3}$.

1285. 利用平移两腰的方法。

1287. 问题归结为讨论等腰三角形及其对称轴。

1288. 作出点 P 关于已知角两边所在的两条直线的对称点 P', P''. 再利用 $(P'P'')$.

1289. 利用点 A 和 B 关于已知角一边所在直线的对称点 A' 和 B'.

1290. 利用点 A 和 B 关于直线 d 的对称点 A', B'.

1291. 利用已知圆绕圆心的旋转。

1292. 将已知的一圆绕点 A 旋转180°.

1295. 作已知圆的内接正方形，然后将它绕圆心旋转一适当的角。

1296．先利用已知二角作一个与所求三角形相似的三角形，再确定相似系数，这就使作出所求三角形成为可能。

1298．先假定问题已解决，再利用以已知角顶为中心的位似。

1299．利用以点 A 为中心、$\frac{|m|}{|n|}$为系数的位似。

1304．设h_a，h_b，h_c 是已知的高线。应用三角形的面积表达式来求边长之比：

$$|a|:|b|:|c|=\frac{1}{|h_a|}:\frac{1}{|h_b|}:\frac{1}{|h_c|}.$$

因此：

$$|a|:|b|:|c|=\frac{|h_b|\cdot|h_c|}{|m|}:\frac{|h_a|\cdot|h_c|}{|m|}:\frac{|h_a|\cdot|h_b|}{|m|},$$

其中 m 是任一线段。作出线段 a_1，b_1，c_1 使

$$|a_1|=\frac{|h_b|\cdot|h_c|}{|m|},\quad |b_1|=\frac{|h_a|\cdot|h_c|}{|m|},\quad |c_1|=\frac{|h_a|\cdot|h_b|}{|m|}.$$

以a_1、b_1、c_1 为边作一个三角形。该三角形与所求三角形的相似系数为 $k=|h_a|:|h_{a1}|$，这就使作出所求三角形成为可能。如果存在以 a_1，b_1，c_1 为边的三角形，此问题就有解。

1305．设 $|AB|$ 是弓形的底，M 是$[AB]$的中点。在弓形内部作正方形 $PQRS$，其中$[PQ]\subset[AB]$，M 是$[PQ]$的中点。然后应用以点 M 为中心和适当系数的位似。

1309．设二圆 (O_1, R) 和 (O_2, R) 彼此相切，并且其中第一个圆与 (AB) 和 (AC) 相切，第二个与 (AB) 和 (BC) 相切，而 A_1，A_2 是与 (AB) 相切的两个切点。矩形 $A_1O_1O_2A_2$ 的二边之比为 1:2，并且内接于三角形 ABI，其中 I 是已知三角形的内切圆之圆心，再利用位似，这样的矩形就可作出。

1310．设 $ABCD$ 是所求的平行四边形。取任意两点 A_1，C_1 并作阿波罗尼圆

$$\{M \mid |A_1M|:|C_1M|=|AD|:|CD|\}.$$

设 O_1 是线段$[A_1C_1]$的中点。引一条射线 O_1X，使 $\angle A_1O_1X$和二

对角线间的已知夹角相等。这条射线与阿波罗尼圆的交点 D_1 是平行四边形 $A_1D_1C_1B_1$ 的一个顶点。从这个平行四边形出发，借助位似就可得到所求的平行四边形。

1311．画出已知三角形的外接圆，再利用位似把它变成已知圆。

1312．如果已知的两条直线相交，则可应用1298题的解法去解（以这两条直线的交点为中心的位似）。倘若两直线平行，则作一个与这两条直线相切的圆，然后利用平移把它变成过已知点的圆（在后一种情况，已知点应位于二已知直线所限定的带形区域里）。

1313．设 A，B 是已知两点，d 是已知直线。以点 $S=d\cap(AB)$ 为中心和以 $\frac{|SA|}{|SB|}$ 为系数的位似，能够确定一点 $Q\in d$，其中 (BQ) 就是所求直线之一。

1314．设 (O) 是所求的圆并且 $d\cap(O)=\{D,E\}$，$d\cap(AB)=C$，有：$|AC|\cdot|BC|=x(x+a)$，其中 $x=|CD|$，而 a 是已知线段的长。

1316．注意到点 D 至三角形各边的距离是已知的。

1324．设 a，b 是平行四边形的已知边，e，f 是其已知对角线。根据条件：$e=ka$、$f=kb$．但 $2(a^2+b^2)=e^2+f^2$．因此 $k=\sqrt{2}$．知道 a，b，$e=\sqrt{2}a$，能作一个三角形，而后再作平行四边形。

1325．问题归结为将梯形的底边按定比分割。

1327．设 a 是正五边形的边长，d 是其对角线的长。于是 $d:a=a:(d-a)$．因此 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}d$

1333．对二已知圆之一按给定方向平移，使平移的向量之长等于已知线段的长。

1335．引用关系式：

$$ac=\frac{1}{2}(p^2+q^2-b^2-d^2),$$

其中 a，c 是梯形二底边之长，b，d 是其二腰之长，p，q 是其对角线的长。作长分别为 m，n，l 的三个线段，使

$$ac=l^2,\ \frac{a+c}{a-c}=\frac{m}{n}.$$

求得：

$$\frac{a}{c}=\frac{m+n}{m-n},\ a^2=\frac{l^2(m+n)}{m-n}.$$

作出长为 a 的线段之后，就能作出梯形。

1336．菱形的高为 $2R$，其中 R 是已知圆的半径。根据边和高作出菱形及其内切圆。利用位移，将所作的圆变成已知的圆。

1337．扇形的对称轴与其弧的交点 M，就是所求圆之切点。再来求所求圆的半径：

$$r=\frac{dR}{d+R}$$

其中 R 是扇形之半径，d 是点 M 到扇形边界半径的距离。

1338．参看1312题的提示。

1339．与两已知圆交于对径点的所有圆，属于一个圆束，该圆束中的圆之圆心位于已知两圆的连心线上。

1340．设 P，Q，R，S 是正方形 $ABCD$ 之各边 $[AB]$，$[BC]$ $[CD]$，$[DA]$ 或其延长线上的点。过点 Q 引 $[PR]$ 的垂线、并在其上截取 $[QT]\cong[PR]$．于是 $[AD]\subset(ST)$．

1341．讨论顶点为 A 的角之平分线。

1342．所求三角形的一个顶点是圆与直线的交点，该直线过点 H 且平行于 (OB)，这里点 O 是圆之圆心。

1343．问题归结为向已知圆引切线，使切线与点 A 和 B 的距离相等。

1344．先作出旁切圆的圆心。

1348．应用阿波罗尼圆。

1349．所求圆之圆心应该在能根据习题已知条件作出的一个阿波罗尼圆上。

1350．问题归结为两圆公切线的作法。

1351．所求圆之圆心是能按习题条件作出的两个阿波罗尼圆的交点。

1352．所求圆的圆心是三个已知圆的根心。

1353．将已知点当作半径为零的圆，此题的解法就和上题一样。

1354．将圆 (O_2) 绕点 A 向着圆 (O_1) 的方向转角 $C'A'B'$（$\triangle A'B'C'$ 是已知的）。对所得到的圆 (O_2') 作以 A 为中心、$k=\frac{|A'B'|}{|A'C'|}$为系数的位似。

1355．先假定问题已解决，再利用以 B 点为中心的位似。

1356．正三角形的映象可能是任意三角形。为作出正六角形的映象，需要把它分解成三角形。

1358．在正五边形 $ABCDE$ 里，点 $M=[BD]\cap[AC]$ 分对角线 $[BD]$ 成中外比（《黄金分割》）：

$$|BD|:|MD|=|MD|:|BM|.$$

为实际需要，再写出比值

$$|BM|:|MD|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx\frac{2}{3}.$$

1360．（1）设圆的映象是椭圆 Q，作出椭圆 Q 的共轭直径 $[AB]$ 和 $[CD]$．过线段 $[OA]$ 的中点引直线 $d\parallel(CD)$，设 $d\cap Q=\{M,N\}$．则三角形 BMN 即为所求。

（2）引椭圆 Q 在点 B，M，N 处的切线。它们平行于三角形的对边。

1361．应用1360题的解法。

1362．利用已知点的极线。

1363．将圆内接正三角形的边数增加一倍，并将这种作法应用到映象上。

1365．在圆的映象是椭圆 Q 的共轭直径的端点处，作该椭圆的切线。

在所得的平行四边形的对角线与椭圆 Q 的交点处，向该椭圆引切线。

1366. 应用1364,1365题的解法。

1368. 作出以 $[AB]$ 为直径的圆 Q_0 和垂直 $[AB]$ 的直径 $[C_0D_0]$。在以 (AB) 为轴和以 C_0 与 $C=f(C_0)$ 为对应点的亲似 f 变换下，椭圆 Q 是圆 Q_0 的象。

1369. 作出以 $[AB]$ 为直径的圆 Q_0，画出它的内接正 n 角形。在将 Q_0 变成 Q 的亲似变换下，作出正 n 角形的象。

1370. 参看1368题的提示。过所作的点 $M\in Q$ 的原象 M_0 引圆 Q_0 的切线，并求作该切线的象。

1371. 在将圆 Q_0 变成椭圆 Q 的亲似变换下，作出圆 Q_0 两垂直直径的象。

1372. 设由轴 s 及两个点 $M\in s$ 和 $M'=f(M)$ 给出亲似 f。过线段 $[MM']$ 的中点 C 引直线 $(CO)\perp(MM')$。设 $(CO)\cap s=O$。以点 O 为圆心过点 M 的圆经过点 M' 并且和 s 相交于点 A 和 B 处。二垂直直线 $(M'A)$ 和 $(M'B)$ 是二垂直直线 (MA) 和 (MB) 的象。这就是说二直线 (MA) 和 (MB) 是亲似 f 的主方向。过已知点 N 并分别平行于直线 (MA) 和 (MB) 的直线 a 和 b 即为所求。

当 $(CO)\parallel s$ 时，其中一个主方向由轴 s 确定，另一个与它垂直。

1373. 作出以 $[AB]$ 为直径的圆 Q_0 及与它垂直的直径 $[C_0D_0]$ 求作以轴 (AB) 及对应点 C_0 与 $C=f(C_0)$ 所确定的亲似 f 的主方向（参看1372题）。作出圆 Q_0 的具有主方向的相互垂直的两条直径。并作出它们在亲似 f 下的象。

1374. 连接平行四边形各对边中点的两线段是映象成圆的椭圆之共轭直径。再利用将椭圆变成圆的亲似。

应用斯丹纳或帕斯卡定理亦可。这时用一把直尺就能完成作图。

1375. 平行四边形的两条对角线是映象为圆的椭圆之共轭直径。

1377. 在将以 $[AB]$ 为直径的圆 Q_0 变成椭圆 Q 的亲似变换下，作出直线 l 的原象 l_0，并求点 M_0、$N_0\in l_0\cap Q_0$ 的象。

1379．化为习题1375．

1380．设两点 S 和 O 是圆锥的顶点及其底之中心的映象、点 O_1 是圆柱上底中心的映象。再应用将点 O 变成 O_1 的、以 S 为中心的位似。

1381．作赤道（对应成纬线）内接正三角形的映象。棱锥的顶点被映成赤道的极点。

1382．棱柱底的各顶点属于球面与各个平行平面的截线，各平行平面是与球心等距的。

1383．画出球面、它的赤道及与它相对应的极点。圆柱的底和球面的赤道被映成具有相应平行轴的合同椭圆。球面极点的映象作为柱底中心的映象。

1384．作出赤道外切正三角形的映象。如果点 N 和 S 是与赤道相对应的极点之映象，则棱柱的侧棱被映成与线段 $[NS]$ 平行且相等的线段。

1385．作出与赤道相对应的极点之映象 N，S．引映象为赤道的椭圆之二共轭直径 $[ML]$ 和 $[HG]$．以 $[ML]$ 和 $[NS]$，$[HG]$ 和 $[NS]$ 为共轭直径的两个椭圆就是所求两条径线的映象。在动手画这些椭圆时，事先作出它们的轴是有益的。

1386．应用鲍利克——斯瓦兹（PohLke-Schwarz）定理。

1388．根据立方体各顶点在标准正交标架下的坐标，作出其各顶点的映象。

1389．参看1388题的提示。

1390．利用1194题。

1391．作出点 $l'\cap(A'B'C')$ 和点 $m'\cap(A'B'C')$ 的映象（参看1390），或利用1195题。

1392．设平面 Π' 与标架 R' 的各轴相交于各点 $A'\in(O'A'_1)$，$B'\in(O'A'_2)$， $C'\in(O'A'_3)$．作出位于坐标平面 $(O'A'_1A'_2)$ 上的以 O' 为圆心的单位圆的映象，并作出由点 O' 向直线 $(A'B')$ 所引之垂线足 M' 的映象，类似地作出由点 O' 向直线 $(A'C')$ 所作的垂线足 N' 的映象．则点 $P=(CM)\cap(BN)$ 是由点 O' 向平面

H'所作的垂线足的映象。

1393. 问题化为1392题。

1394. 假定标架 R' 的轴指向平面 Σ. 线段 e_x, e_y, e_z 的长也将用同一字母表示。记 $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{O'A'_1}, \overrightarrow{O'O}})$,

$\beta = (\widehat{\overrightarrow{O'A'_2}, \overrightarrow{O'O}})$, $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{O'A'_3}, \overrightarrow{O'O}})$. 这里$\overrightarrow{O'O} \perp \Sigma$.

应用关系式：$e_x = \sin\alpha$, $e_y = \sin\beta$, $e_z = \sin\gamma$;

$\cos\hat{A}_1 = \text{ctg}\,\beta \cdot \text{ctg}\,\gamma$, $\cos\hat{A}_2 = \text{ctg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\gamma$, $\cos\hat{A}_3 = \text{ctg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\beta$, 其 $\hat{A}_i$ 是迹线三角形的各顶角;

$$\widehat{A_2OA_3} = 180° - \hat{A}_1, \quad \widehat{A_1OA_3} = 180° - \hat{A}_2, \quad \widehat{A_1OA_2} = 180° - \hat{A}_3;$$

$$e_x = \sqrt{\frac{\cos\hat{A}_1}{\sin\hat{A}_2 \cdot \sin\hat{A}_3}}, \quad e_y = \sqrt{\frac{\cos\hat{A}_2}{\sin\hat{A}_1 \cdot \sin\hat{A}_3}},$$

$$e_z = \sqrt{\frac{\cos\hat{A}_3}{\sin\hat{A}_1 \cdot \sin\hat{A}_2}};$$

$$e_x : e_y : e_z = \sqrt{\sin 2\hat{A}_1} : \sqrt{\sin 2\hat{A}_2} : \sqrt{\sin 2\hat{A}_3};$$

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2.$$

1395. 利用1394题的提示。

1396. 在正二测射影下，作出立方体的映象（参看1395题）。球面与立方体的侧面相切于该侧面对角线的交点处。根据已知的共轭直径能作出椭圆——球面的大圆之映象。它的长轴就是球面之周线的直径。

1398. 参看1397题。

1399. 利用由两个相对应的三点组 (M, N, P) 和 (M_1, N_1, P_1) 所确定的亲似变换，其中 M, N, P 是点 M', N', P' 的映象，而 M_1, N_1, P_1 是点 M', N', P' 在立方体底面上的正射影（再参看1394题）。

1400. 利用由两个相对应的三点组 (M, N, P) 和 (M_1, N_1, P_1) 所确定的透射，其中 M, N, P 是点 M', N', P' 的映象，而 M_1, N_1, P_1 是点 M', N', P' 从棱锥顶点到其底面上的中心

1401．记 Q_1 为圆柱 F' 之下底圆 Q_1' 的映象、 a 为 Π' 在圆柱底面上之迹线的映象、M 是已知点$M'\in\Pi'$ 的映象。M'在圆柱母线 l' 上，M_1 是点 $M_1'=l'\cap Q_1'$的映象。习题化为：在以 a 为轴和以 M 与$M_1=f(M)$ 为对应点的亲似 f 变换下，作出椭圆 Q_1 的原象。

1402．解法与1401题的解法类似，但要用以S为中心的透射代替亲似变换，其中点 S 是圆锥顶点的映象。

1403．以 S 为中心、a 为轴和以点 M 与 $M_1=f(M)$ 为对应点的透射 f ，将平面 Π' 的点之映象变成它们底的映象。确定曲线 $Q=f^{-1}(Q_1)$ 的非本义点的个数（参看1199题）。

1404．参看1191题。

1406．作在直线 l' 所在平面上的经线之映象。

1407．映象的条件是不充分的，因此正五边形三个顶点的正交射影可任意给出（甚至在一条直线上）。然后将映象变成是充分的。

1408．已知映象是不充分的，所求的点可在直线l' 的映象 l 上任意选取。然后将映象变成是充分的。

1409．和平行于直线 l 的椭圆 Q 的直径相等的一线段是所求线段的映象。

1410．设椭圆 Q 是已知椭圆 Q' 的映象、角 ABC 是已知角 $A'B'C'$ 的映象。过椭圆 Q 的中心 O 引两引射线，平行于角 ABC 的两条边。设 A_1 和 C_1 是这两条射线与椭圆的交点。于是，和三角形 A_1OC_1 的中线 $[OM_1]$ 平行的射线 $[BM)$ 是角 $A'B'C'$ 平分线的映象。

1411．参看1410题的提示。

1412．原象是互相垂直的直线被映成两条直线，它们关于映象成圆的椭圆有共轭方向。

1414．作圆 Q' 内接正三角形 MNP 的映象，其中使 $[MN]\parallel[AB]$ （参看 1360 题）。引直线 $(AC)\parallel[MP]$，$(BC)\parallel[NP]$。

1415．设椭圆 Q 的内接三角形 ABC，是椭圆 Q' 的内接三角形 $A'B'C'$ 的映象。在将椭圆 Q 变成圆的亲似变换下，作出三角形 ABC 的象。

1417．设三角形 ABC 是三角形 $A'B'C'$ 的映象、点 O 是点 O' 的映象。过点 O' 作平行于三角形 $A'B'C'$ 之二顶角 B' 和 C' 的平分线所在两条直线的映象（参看1173题）。于是过点 O 的两个直线对是两个垂直直线对的映象。作点 O_1，使以 (AC) 为轴和以 O 与 $O_1=f(O)$ 为对应点的亲似变换 f，将映象成垂直直线的直线仍变成垂直直线。在变换 f 下，求作三角形 ABC 的象。

1418．设平行四边形 $ABCD$ 是已知矩形的映象，线段〔MN〕是所求正方形之一边的映象。所给出的映象，在度量上不是完全确定的，仍有两个自由参数。线段〔$M'N'$〕之垂线的映象，可以任意选取，仅受下述唯一限制：通过一点的映象成垂直直线的直线对应该是彼此分离的。

然后这样选取位于已知矩形平面上的每一个图形，被确定的映象都精确到相似（一个自由参数）。过映象平面的任一点 O 引两条平行于平行四边形 $ABCD$ 各边的直线、以及引一条平行于线段〔MN〕的直线，并引映象垂直于线段〔$M'N'$〕的直线。问题归结为给出能将垂直直线的映象仍变成垂直直线的亲似（参看1417题的提示）。

1419．作与原象相似的三角形（参看1415题的提示）。知道了相似系数，再作与原象全等的三角形，以及它的内切圆的半径。

1420．设三角形 ABC 是三角形 $A'B'C'$ 的已知映象。作与三角形 $A'B'C'$ 相似的三角形 ABC''。在以 (AB) 为轴、和以 C 与 $C''=f(C)$ 为对应点的亲似 f 变换下，作出三角形 ABC'' 之外接圆的原象。

1421．参看1420题的提示。

1422．正方形内切圆的映象由正方形的映象完全确定。这就能够作出在点 A' 和 B' 处的线段〔$A'B'$〕的两条垂直直线的映象、以及所求正方形对角线的映象（参看习题1410）。

利用将所给正方形的映象变成正方形的亲似，能简化上述作法。

1424．可以把任意三角棱柱的映象看作是所给棱柱的映象。

平面 $(A'B_1'C_1')$ 的垂线 $(A_1'X')$ 也是直线 $(A'E_1')$ 的垂线，其中 E_1' 是线段 $[B_1'C_1']$ 的中点。作与三角形 $A'A_1'E_1'$ 相似的三角形 AA_1E'' . 在以 (AA_1) 为轴和以 E_1 与 $E''=f(E_1)$ 为对应点的亲似 f 变换下，作出点 X'' 的原象 X，这里 X'' 是由点 A 向直线 (AE'') 所引垂线之垂足。点 X 是由点 A_1' 向平面 $(A'B_1'C_1')$ 所引垂线 $(A_1'X')$ 之垂足的映象。

1425．三角形 $A'A_1'C_1'$ 的形状是已知的，因此要作点 X' 的映象 X，可以应用在1424题里所指出的一般方法。

要是事先证明 $(A'C_1', X')=\frac{1}{2}$，或者证明平面 $(A_1'B'D')$ 即为所求，就能更简单地作出点 X .

1426．$\frac{a\sqrt{6}}{6}$（参看1425题的提示）。

1427．利用1425题。截面是正六边形，其面积等于 $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

1428．所求的垂线 $(P'X')$ 和直线 $(A'M_1')$ 的垂线 $(B'K')$ 相平行，其中 $K'\in(A'A_1')$，$M_1'\in(A_1'B_1')$. 为作出点 K' 的映象，要利用把正方形 $A'B'B_1'A_1'$ 的映象变成正方形的亲似。

点 K 也可按另一种方式来求。作 $[M_1L]\parallel[A_1B]$，$L\in[BB_1]$；$[A_1K]\cong[B_1L]$，$K\in[A_1A]$.

但用室内射影法作映象最简单。为此这样放置立方体，使它的棱沿着各坐标轴的方向，并使侧面 $A'B'B_1'A_1'$ 的映象是正方形。于是这个侧面各角的映象无畸变.

1429．作出棱锥 $S'A'B'C'D'$ 与平面 $(S'M'N')$ 截面的映象，其中 M'，N' 是底边 $[B'C']$ 和 $[A'D']$ 的中点。这个截面的形状是已知的。这样就能应用度量作图通法。

问题的解法还能简化。如果就射影平面这样放置已知棱锥，

使三角形 $S'M'N'$ 的映象与此三角形相似。

1434．作出与所选取的赤道相对应的二极点 N 和 S 的映象、以及两条经线的映象，该二经线所在二平面是相互垂直的（参看1385题）。从位于线段〔$N'S'$〕的端点 N' 向外引的延长线上的点 M'，向这两条经线分别引切线，再求出它们与球面在点 S' 处的切平面之交点。这些点是以 M' 为顶点的球面之外切棱锥底边上的各个中点。

1435．参看1434题的提示。

1436．参看1384题的提示。

1437．设点 O 是球心的映象，点 N 和 S 是与所选取的赤道相对应的极点之映象。作出赤道圆内接正方形的映象，并再作一个与它相似的中心相同、边为 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ 的正方形的映像（a 是半径为 r 球面之内接立方体的棱长）。在是第二个（较小的）正方形映象的平行四边形的顶点处，引与直线 (NS) 平行的直线，并在其中每条直线上，从顶点两侧截取长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}|ON|$ 的线段。所截得的各线段的端点就是球面内接立方体诸顶点的映象。

也可按另一种方式来作。作两条经线的映象，该二经线所在的平面是相互垂直的（参看1385题）。这两个平面相交成直线 $(N'S')$．作两个经线圆的内接正方形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的映象，使线段〔AD〕和〔A_1D_1〕平行于直线 (NS)．于是在此直线 (NS) 上相交的二线段〔AB〕和〔A_1B_1〕，是球面内接立方体中的一个底上每对边中点连线所成之二线段的映象。而线段〔DC〕和〔D_1C_1〕是该立方体另一底每对边中点连线所成之线段的映象。

再参看1388题的提示。

1438．求出这样的比值，四面体侧面按此比值分别垂直于其侧面的一个球面的直径。

1439．设椭圆 Q 是赤道的映象。四面体 $A'B'C'D'$ 的底被映成任意的三角形 ABC。其原象是位于球面在极点 S' 处之切平面

内的。二平面 Π' 和 Ω' 分别垂直于四面体侧面 $A'B'D'$ 和$B'C'D'$ 所在之平面，作在平面 Π' 和 Ω' 上的两条经线之映象。求作点 $P'=\Pi'\cap(A'B')$，$R'=\Omega'\cap(B'C')$的映象，以及由此两点向对应的两经线所引之两切线 $(P'K')$，$(R'L')$ 的映象。其中点 K' 和 L' 是球面与侧平面 $A'B'D'$ 和 $B'C'D'$ 的两切点。

设 (P_1E_1) 和 (R_1F_1) 是椭圆 Q 的两条直径，分别与二直线 (AB) 和 (BC) 的方向成共轭。作点 $P_2=(P_1E_1)\cap(PK)$，$R_2=(R_1F_1)\cap(RL)$，并引直线 $(A_1B_1)\|(AB)$，$(A_1B_1)\ni P_2$；$(B_1C_1)\|(BC)$，$(B_1C_1)\ni R_2$. 于是点 $B_1'=(A_1'B_1')\cap(B_1'C_1')$ 属于直线 $(B'D')$，这就使得能够作出该直线的映象。

类似地求出，赤道平面与侧面 $A'C'D'$ 所在平面之交线 $(A_1'C_1')$ 的映象，以及直线 $(A_1'C_1')$ 与直线 $(A'D')$，$(B'D')$之交点的映象，最后再求出直线 $(A'D')$ 和 $(C'D')$ 的映象。

1440．作球面的一条直径的映象，该直径垂直于过点M'的经线所在平面。这就使得能够作出所指的那条经线所在平面与赤道所在平面之交线的映象。

1441．利用1440题。

1442．如果 x 是射影轴和M (M_1,M_2) $=l\cap\Pi_2$，则 $M_1=l_1\cap x$，$M_2\in l_2$，$(M_1M_2)\perp x$和$M=M_2$.类似地，如果$N(N_1,N_2)=l\cap\Pi_1$，则$N_2=l_2\cap x$，$N_1\in l_1$，$(N_1N_2)\perp x$和$N=N_1$.

1443．如果 x 是射影轴和 φ 是由平面 Σ 在正射影图上所确定的亲似变换，则 $\Sigma\cap\Pi_1=\varphi^{-1}(x)$，$\Sigma\cap\Pi_2=\varphi(x)$.

1444．利用由平面 Σ 在正射影图上所确定的亲似 φ，在直线 l_2 上求一点 X_2，使它的原象 X_1 在直线 l_1 上（参看1194题）。

1446．利用由平面 (MNP) 在正射影图上所确定的亲似 φ，求在四面体各棱的水平射影和铅直射影上的对应点。

1447．参看1195题。

1448．记 $x=\Pi_1\cap\Pi_2$，$A_0=(A_1A_2)\cap x$，$B_0=(B_1B_2)\cap x$. 作以$[A_1A']$和$[B_1B']$为底的直角梯形，这里的$[A_1A']$和$[B_1B']$分别与线段$[A_2A_0]$和$[B_2B_0]$相等。于是$[A'B']\cong[AB]$.

1449. 直线$a(a_1,a_2)$垂直于平面Σ，当且仅当$a_1\perp m_1$，$a_2\perp l_2$. 过点A引一条这样的直线a. 作点$B_2\in a_2$，由平面Σ在射影图上所建立的亲似变换下，它的原象B_1在直线a_1上，点$B(B_1, B_2)$即为所求。

1450. （1）线段$[C_3D_3]\perp[N_3S_3]$是赤道的侧面射影。点C、D的铅直射影C_2，D_2决定了一椭圆的短轴、该椭圆是赤道铅直射影。

（2）纬线的侧面射影是线段$[K_3L_3]\perp[N_3S_3]$. 铅直射影K_2，L_2决定了一个椭圆的短轴，该椭圆是纬线的铅直射影。它的长轴与线段$[K_3L_3]$相等。该椭圆与球面的周线相切于点P_2，Q_2，这两个点是点$P_3=Q_3=[E_3F_3]\cap[K_3L_3]$的侧面射影，其中$[E_3F_3]$是球面的侧面射影的直径，它与线段$[N_2S_2]$相平行。

（3）这条纬线的侧面射影是线段$[E_3H_3]\perp[N_3S_3]$或线段$[F_3G_3]\perp[N_3S_3]$.

1451. 锥顶的铅直射影M_2可在直线(N_2S_2)上任意选取，(N_2S_2)是球面直径的铅直射影$[N_2S_2]$所在直线。作球面之外切圆锥的侧面射影$M_3K_3L_3$，然后再作它的铅直射影。

1452. 参看1194题。

1453. 平行的各条直线具有公共灭点。

1454. 作由点M'和二直线a'与b'所确定的两个平面交线的透视射影。

1455. 在中心射影下，完成下列作图。过点A'_1和B'_1引垂直于线段$[A'_1B'_1]$的两条直线a'_1和b'_1. 过点B'_1引与直线$(A'_1B'_1)$夹45°角的直线d'_1. 过点$D'_1=d'_1\cap a'_1$引直线$c'_1\parallel(A'_1B'_1)$，并求点$C'_1=c'_1\cap b'_1$. 四边形$A'_1B'_1C'_1D'_1$是正方形。

1458. 作在平面Π'上的正方形透视射影，与1455题的解法类似，只是平面Π'灭线起着水平线的作用。根据所作出的正方形的透视射影，作其基线的透视射影。

1459. 如果线段$[A'_1B'_1]$平行于象平面Σ，则它在象的基线下的平行射影等于线段$[A'_1B'_1]$.

当 $[A'_1B'_1]\perp\Sigma$ 时，转化为用上述方法作出以 $[A'_1B'_1]$ 和 $[A_1'D_1']\parallel\Sigma$ 为直角边的等腰直角三角形。

在一般情况下，需要作出以 $[A'_1B'_1]$ 为斜边和以 $[A'_1D'_1]\parallel\Sigma$ 及 $[B'_1D'_1]\perp\Sigma$ 为两直角边的直角三角形 $A'_1B'_1D'_1$。

1460．作以 $[A'B']$ 为斜边、以 $[A'D']$ 及 $[B'D']$ 为两直角边的直角三角形，其中 $[A'D']$ 平行实物平面 Π'_1，而直角边 $[B'D']\perp\Pi'_1$。于是 $[A'D']\cong[A'_1D'_1]$，并且能求出它的实际值（参看1459题）。将直角边 $[B'D']$ 的实际值当作它在象平面上平行射影的值来求。

1461．作立方体之底的透视射影（参看1455题）；求出底边的实际值（参看1459题）；作出立方体的其中一条侧棱的透视射影（参看 1460 题的提示）。再利用立方体上底面和下底面对应边的平行性，最后作出立方体的透视射影。

1462．作出模 2 的剩余类域 F_2 上的仿射直线。

1463．作出 $A_2(F_2)$．

1464．作出 $A_3(F_3)$．

1465．根据规则：

$$\sigma(\vec{x},\vec{y})=\vec{y}-\vec{x}$$

来讨论映射 σ：

$$V\times V\longrightarrow V,$$

并验证仿射空间的韦尔公理成立。

1466．在集合 $M_{n,p}$ 上以自然的方式来确定域 K 上的向量空间的结构。其次像1465题那样去作。所得到的仿射空间的维数等于 $n\cdot p$.

1467．由下述事实就可以得到证明：所给出的两个空间的两平移空间是不同构的。

1468．设 V 是域 K 上的 n 维向量空间、E 是非空集合。按照规则：

$$\sigma(A,B)=\overrightarrow{0},\ \forall A,B\in E,$$

确定的映射 σ：

$$E \times E \longrightarrow V$$

韦尔公理2成立、而公理1不成立。

1469．设V是域K上的n维向量空间和E是具有平移空间V的仿射空间。从而就给出了满足韦尔公理1—2的映射σ：

$$E \times E \longrightarrow V.$$

再按照规则：

$$\bar{\sigma}(A,B) = \sigma(A,B) + \vec{a}.$$

其中$\vec{a}$是V中的已知非零向量，来讨论新映射：

$$\bar{\sigma}: E \times E \longrightarrow V.$$

映射$\bar{\sigma}$满足韦尔第一公理，但不满足韦尔第二公理。

1471．该命题等价于凸四角形的内角和等于2π，这就等价于第五公设。

1476．讨论一个四面体顶点的集合；直线——点对；平面——三点组。

1480．参看1456题。

1481．参看1468、1469题。

1482．参看1466题。

1484．平面$\dot{A}_2(Z)$的每一条直线，都能由过标架$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$原点的直线经平移而得到。设直线d过点O并以$\frac{m}{n}$为角系数(m,n是整数且$n\neq 0$)．于是此直线含有点(nl,ml)，其中l是整数。倘若$d\,|\,(Oy)$，则这条直线含有点(O,l)．

1512．对于已知三角形ABC的极三角形有

$$a_1 + b_1 > c_1.$$

再从极三角形变成已知三角形，就得到

$$\pi - \hat{A} + \pi - \hat{B} > \pi - \hat{C}.$$

因此　$\hat{A} + \hat{B} - \hat{C} < \pi$.

1517．3733公里。

1518．根据余弦定理：

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\hat{A}.$$

$$\cos\frac{b}{r}=\cos\frac{a}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\hat{B}.$$

将第一个等式两端乘以$\cos\frac{c}{r}$再和第二等式相加，得到：

$$\cos\frac{b}{r}=\cos\frac{b}{r}\cdot\cos^2\frac{c}{r}+\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\hat{B}+$$

$$+\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}\cdot\cos\hat{A}.$$

注意到： $1-\cos^2\frac{c}{r}=\sin^2\frac{c}{r}\neq0$， 因此我们得到：

$$\sin\frac{a}{r}\cdot\cos\hat{B}=\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\frac{b}{r}-\cos\frac{c}{r}\cdot\sin\frac{b}{r}\cdot\cos\hat{A}.$$

这就是所要求的。

1519．利用极三角形及在1518题中所得到的公式。

1520．由余弦定理：

$$\cos\frac{a}{r}=\frac{\cos\hat{A}+\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}}{\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}.$$

据此就可求得角A之对边a的长。类似地可求出球面三角形其它两边b和c的长。

1521．根据余弦定理：

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\hat{A},\qquad(1)$$

$$\cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}+\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{b}{r}\cdot\cos\hat{C}.\qquad(2)$$

将等式（2）的两端乘以 $\cos\frac{b}{r}$，得到：

$$\cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\cdot\cos^2\frac{b}{r}+\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{b}{r}\cdot\cos\hat{C}。\quad(3)$$

根据正弦定理：

$$\sin\frac{c}{r}=\frac{\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}.$$

因此

$$\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\hat{A}=\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\hat{C}\cdot\operatorname{ctg}\hat{A}.\qquad(4)$$

将（3），（4）式代入公式（1）之后，就得出所要求的某变换公式。

1522．使用余弦定理。

1523．应用正弦定理。

1524．应用《五元素公式》（习题1518）：

$$\sin\frac{c}{r}\cdot\cos\hat{A}=\sin\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{a}{r}\cdot\cos\hat{C},$$

于是在 $\hat{A}=\frac{\pi}{2}$ 时，求得：

$$\sin\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{a}{r}\cdot\cos\hat{C}.$$

将此等式两端除以 $\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{b}{r}$ 之后，就可得到所要求的公式。

1525．根据《四元素公式》（习题1521）：

$$\sin\frac{c}{r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{b}{r}=\operatorname{ctg}\hat{B}\cdot\sin\hat{A}+\cos\hat{A}\cdot\cos\frac{c}{r},$$

于是在 $\hat{A}=\frac{\pi}{2}$ 时，就得到：

$$\sin\frac{c}{r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{b}{r}=\operatorname{ctg}\hat{B}.$$

1526．根据在1525题中得到的公式：

$$\operatorname{ctg}\hat{B}=\sin\frac{c}{r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{b}{r},\quad\operatorname{ctg}\hat{C}=\sin\frac{b}{r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{c}{r}.$$

将等式的两端分别相乘得到：$\mathrm{ctg}\hat{B}\cdot\mathrm{ctg}\hat{C}=\cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}$. 再应用球面毕达哥拉斯定理，就得到所要求的公式。

1527. 应用余弦定理。

1528. 应用球面毕达哥拉斯定理。

1529. 应用1526题的公式。

1530. 对直角球面三角形 ADB 和 BDC 应用1523题的公式。

1531. 有：

$$\sin\frac{h_a}{r}=\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\hat{C},$$

$$\sin\frac{h_b}{r}=\sin\frac{c}{r}\cdot\sin\hat{A}.$$

因此

$$\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{h_a}{r}=\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\hat{C},$$

$$\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{h_b}{r}=\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}\cdot\sin\hat{A}.$$

考虑到 $\sin\frac{c}{r}\cdot\sin\hat{A}=\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\hat{C}$（据正弦定理），求得：

$$\sin\frac{a}{r}\cdot\sin\frac{h_a}{r}=\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{h_b}{r}.$$

1532. (1) $\frac{a}{r}=68°58'$，$\hat{B}=148°32'$，$\hat{C}=102°23'$；

(2) $\frac{c}{r}=75°5'$，$\hat{B}=48°37'$，$\hat{C}=78°51'$；

(3) $\left(\frac{a}{r}\right)_1=48°37'$，$\left(\frac{a}{r}\right)_2=131°23'$，$\left(\frac{c}{r}\right)_1=32°23'$；

$\left(\frac{c}{r}\right)_2=147°37'$，$\hat{C}_1=45°34'$，$\hat{C}_2=134°26'$；

(4) $\frac{a}{r}=43°1'$，$\frac{c}{r}=32°4'$，$\hat{B}=55°41'$；

(5) $\frac{b}{r}=67°7'$, $\frac{c}{r}=155°47'$, $\hat{B}=80°11'$;

(6) $\frac{a}{r}=110°46'$, $\frac{b}{r}=67°7'$, $\frac{c}{r}=155°47'$.

1533. 据余弦定理，可表出 $\cos\hat{A}$，并代入公式：

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\hat{A}}{2}},$$

然后再作些不太复杂的变换，就可得到所要求的公式。类似地也可求得 $\cos\frac{\hat{A}}{2}$的公式。

1534. 根据余弦定理求得：

$$\cos\frac{a}{r}=\frac{\cos\hat{A}+\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}}{\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}.$$

将 $\cos\frac{a}{r}$的这个表示式代入公式：

$$\sin\frac{a}{2r}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{a}{r}}{2}}.$$

然后再作些不太复杂的变换就得到：

$$\sin\frac{a}{2r}=\sqrt{\frac{-\cos p\cdot\cos(p-\hat{A})}{\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}}, \qquad (*)$$

其中 $p=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$. 因此 $p-\hat{A}=\frac{\pi}{2}-(\hat{A}-\frac{\varepsilon}{2})$，

所以公式(*)即为所要求的形式。类似的可求得 $\cos\frac{a}{2r}$的公式。

1535. 由平面三角已知公式：

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}+\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}},$$

此公式能改写成：

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}+\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2}. \qquad (**)$$

从1533题中的公式求得：

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{r}\cdot\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{p}{r}\cdot\sin\frac{p-a}{r}}}.$$

类似地求得：

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-a}{r}\cdot\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{p}{r}\cdot\sin\frac{p-b}{r}}}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{p}{r}}.$$

类似地求得：

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\sin\frac{p-b}{r}}{\sin\frac{p}{r}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\sin\frac{p-a}{r}}{\sin\frac{p}{r}}.$$

把这些表示式代入公式(**)的右端，然后再稍加变换就得到：

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\sin\frac{2p-a-b}{2r}\cdot\cos\frac{a-b}{2r}}{\sin\frac{c}{2r}\cdot\cos\frac{2p-c}{2r}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2}.$$

注意到 $2p=a+b+c$，就得到了公式(α)中的第一个。对 $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$

应用平面三角公式，就得到这些公式中的第二个。借助于极三角形，从公式(α)又可得到公式(β)。

1536．应用1534题的公式，求得：

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2r}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin(\hat{A}-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(\hat{B}-\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sin(\hat{C}-\frac{\varepsilon}{2})}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2r}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin(\hat{B}-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(\hat{A}-\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sin(\hat{C}-\frac{\varepsilon}{2})}}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2r}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2r}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(\hat{C}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

因为 $\hat{C}$ 是角之中最大的，所以 $\hat{C}-\frac{\varepsilon}{2}>0$（这也就是说 $\sin\left(\hat{C}-\frac{\varepsilon}{2}\right)>0$）．实际上，如果 $\hat{C}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，则必有 $\hat{A}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$\hat{B}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，而因此

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon.$$

所以

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\geqslant 3\pi.$$

这与习题1512的结果相矛盾。有：

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2r}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2r}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\hat{C}\cdot\cos\frac{\varepsilon}{2}-\cos\hat{C}\cdot\sin\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{1}{\sin\hat{C}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}-\cos\hat{C}}.$$

由此求得 $\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}$.

1537．（1）根据1533题的公式求得：

$$\hat{A}=47°59',\ \hat{B}=130°47',\ \hat{C}=50°49';$$

（2）根据1534题的公式求得：

$$\frac{a}{r}=60°32',\ \frac{b}{r}=117°28',\quad \frac{c}{r}=78°42';$$

（3）应用1535题的公式（α）求得：

$$\hat{A}=32°57',\ \hat{B}=128°13';$$

再应用1534题的公式得到：

$$\frac{c}{r}=85°58';$$

（4）应用1535题的公式（β），求得：

$$\frac{a}{r}=36°53',\quad \frac{b}{r}=42°47';$$

再应用1533题公式中的第二个，得到：

$$\hat{C}=54°26'.$$

1538．对椭圆面 S_2 利用球面模型。

1541．如果圆的半径等于$\frac{\pi}{2}r$。

1542．$\frac{\pi}{2}r$。

1547．每条过对称中心的直线和对称中心的极线。

1548．参看1546题。

1558．对平面 A_2 应用开莱（Cayley）——克来因（Klein）解释。

1563．注意到极限圆无条件的相切。

1567．对 $n=3$ 时导出公式。当 $n>3$ 时，把已知的 n 边形分解成三角形。

1576．（1）根据点的邻域定义；

（2）利用点的邻域定义和拓扑结构的第二公理；

（3）利用邻域定义；

（4）只须将含在 U 里的点 x 的开邻域取作 V。

1577．如果这样的拓扑存在，则它的开集的集合就必然是集合

$$T=\{V\subset X\,|\,V\in O_x,\ \forall x\in V\}$$

（参看上题的性质（4））。这就是说拓扑是唯一的，如果它存在的话。其次验证 T，满足拓扑结构全部公理，并且验证在拓扑 T 里集合 O_x 是所有点 x 邻域的集合。

1579．有 $\overline{A}=X$，也就是说 $U\cap\overline{A}=U$．但因为 $U\in T$，所以 $U\cap\overline{A}\subset\overline{U\cap A}$．

1580．（1）$I=[a,b]$ $(a,\ b\in R)$．于是 $\mathring{I}=(a,\ b)$，$\overline{I}=I$，$b(I)=\{a,b\}$；

（2）$I=[a,b)$，$\mathring{I}=(a,b)$，$\overline{I}=[a,b]$，$b(I)=\{a,b\}$；

（3）$I=(a,b]$，$\mathring{I}=(a,b)$，$\overline{I}=[a,b]$，$b(I)=\{a,b\}$；

（4）$I=(a,b)$，$\mathring{I}=I$，$\overline{I}=[a,b]$，$b(I)=\{a,b\}$；

（5）$I=[a,+\infty)$，$\mathring{I}=(a,+\infty)$，$\overline{I}=I$，$b(I)=\{a\}$；

（6）$I=(-\infty,b]$，$\mathring{I}=(-\infty,b)$，$\overline{I}=I$，$b(I)=\{b\}$；

（7）$I=(a,+\infty)$，$\mathring{I}=I$，$\overline{I}=[a,+\infty)$，$b(I)=\{a\}$；

（8）$I=(-\infty,b)$，$\mathring{I}=I$，$\overline{I}=(-\infty,b]$，$b(I)=\{b\}$．

（9）$I=(-\infty,+\infty)$，$\mathring{I}=I$，$\overline{I}=I$，$b(I)=\varnothing$．

1583．例如

$$A=\begin{cases}\{(x,y)\,|\,x>0,\ 0<y<1\},\\ \{(x,y)\,|\,x>0,\ y\geqslant 1,\ x\in Q,\ y\in Q\},\end{cases}$$

其中 Q 是有理数集合。

1585．例：A 是平面 E_2 上单位正方形 B 的有理点集合。有：

$\mathring{A}=\varnothing$，$b(\mathring{A})=\varnothing$，$b(A)=\overline{A}=B$，$b(\overline{A})=L$——正方形 B 的边界

1586．利用：$C(A\cup B)=CA\cap CB$．按条件所指出的集合将是不同的，例如，如果 A 和 B 是两个相交的开圆。

1587. 参看1586题的提示。

1588. 称集合 $A\subset X$ 是闭的，如果 $\bar{A}=A$. 设T'是X中的一切闭子集的集合。根据性质（4）T'具有性质 II′：任何有限个闭集的并是闭集。其次再来证明T'也具有性质I′：任何闭集的交是闭集。设

$$T=\{A\in P(X)\,|\,CA\in T'\}.$$

于是(X,T)是拓扑空间。集合T'由映射f唯一确定。这就是说，也唯一的确定了X中的拓扑T.

1589. 设已知连续映射$f: X\longrightarrow Y$. 讨论基本情况 $f(X)=Y$（在其它情况可取映射f_1：$X\longrightarrow f(x)$ ——化成映射f）.其次再用反证法。

1591. 利用子空间

$$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$$

是连通的、紧致的而且是无边的。

1592. 在E_n里存在不同胚的闭凸集，例如：闭的半平面和圆就是不同胚的。

1593. 如果 $E=\{a,b\}$，则$T_1=P(E)$，$T_2=\{O,E\}$，$T_3=\{\varnothing,\{a\},E\}$，$T_4=\{\varnothing,\{b\},E\}$.

1594. 按规则$f(x)=x^2$的映射f：$R\to R$是连续的，但开区间$(-1,1)$的象是半开区间$[0,1)$.按规则$f(x)=\dfrac{1}{x}$的映射f：$(R\setminus\{O\})\longrightarrow R$，它在闭集$[1,+\infty)$上是连续的，它的象是非闭集$(0,1]$.

1595. 将球面放置成使它的心与椭圆面的中心相重合。从中心将椭圆面向球面上映射。

1606. 参看习题1596和1599.

1607. 参看习题1597.

1608. 先就球面讨论此题，然后作仿射变换把球面变成椭圆面。

1609. 参看1602题。

1611．讨论部分环面到坐标平面上的正射影。

1612．验证公式 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 建立了所指出的开域到 R^2 里开集的一个同胚。

1615．可将 $M(m,n)$ 当作 R^{mn}．

1616．设 B_0 是 V 中的固定基。于是对每个 p—标架就确定了 $M(n,p)$ 中的一个秩为 p 的矩阵。然后再利用习题1615．

1617．设 B_0 是 V 中的固定基。证明，V 中的每个 p—维子空间 H，能由一个方程组

$$x^{i_a}=t_{i_a}^{i_a}x^{i_a}$$

来确定。其中 i_a 取 p 个值，它们且与标码 i_a 所取的 $n-p$ 个值是不同的。因而 H 由一个矩阵 $\|t_{i_a}^{i_a}\|\in M(n-p,\ p)$ 所唯一确定。

1618．根据非零向量共线的关系式，$G(p,n)$ 能用因子分解 $G(p+1,V)$ 的方法得到，$\dim V=n+1$．参看1617题。

1619．1．

1620．0．

1621．0．

1622．0．

1623．1．

1624．有同胚 $h:I\longrightarrow I'$，按照规则 $\tau=\frac{1+t}{1-t}$，使 $f=g\circ h$

1629．在每个区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$、$\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 里，曲线 γ 为 C^∞ 类．

1630．C^∞，$x=y+1=z$．

1633．$z_0(x-x_0)+x_0(z-z_0)=0$．

1635．$x=1$，$y=1+2t$，$z=\sqrt{2}(1-t)$．

1636．$x=1-12t$，$y=3+4t$，$z=4-3t$．

1637．$x=x_0+z_0t$，$y=y_0+z_0t$，$z=z_0+2x_0t$．

1638．所给抛物线在其顶点处的切线。

1639．已知椭圆的外切圆。

1640. 过双曲线的顶点且以该双曲线的中心为圆心的圆。

1641. $5at$.

1642. $9a$.

1643. $8a\sqrt{2}$.

1644. 10.

1645. $x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1646. $a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}t$.

1647. $6a$.

1648. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $z=0$, $-\infty<t<+\infty$, a 是已知圆的半径。

1649. $8a$.

1650.

$$x=x_0+\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ \Phi'_y & \Phi'_z\end{vmatrix}t,\quad y=y_0+\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ \Phi'_z & \Phi'_x\end{vmatrix}t,$$

$$z=z_0+\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ \Phi'_x & \Phi'_y\end{vmatrix}t;$$

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & F'_x & \Phi'_x\\ y-y_0 & F'_y & \Phi'_y\\ z-z_0 & F'_z & \Phi'_z\end{vmatrix}=0.$$

其中函数F和Φ的偏导数在点M_0处计算。

1653. $\vec{\tau}=\vec{i}$, $\vec{\nu}=\vec{j}$, $\vec{\beta}=\vec{k}$.

1654. $\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}\sin\frac{t}{2}+\vec{j}\cos\frac{t}{2}-\vec{k}\right)$,

$\vec{\nu}=\vec{i}\cos\frac{t}{2}-\vec{j}\sin\frac{t}{2}$,

$\vec{\beta}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}\sin\frac{t}{2}+\vec{j}\cos\frac{t}{2}+\vec{k}\right)$.

1655. $\vec{\tau}=-\vec{i}\,\frac{3}{5}\cos t+\vec{j}\,\frac{3}{5}\sin t-\frac{4}{5}\vec{k}$,

$$\vec{\nu}=\vec{i}\sin t+\vec{j}\cos t,$$

$$\vec{\beta}=\vec{i}\frac{4}{5}\cos t-\vec{j}\frac{4}{5}\sin t-\frac{3}{5}\vec{k}.$$

1656. $\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k}),$

$$\vec{\nu}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}),$$

$$\vec{\beta}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}).$$

1657. $x=t,\ y=-4t,\ z=1-t.$

1658. $4x\cos t-4y\sin t-3z-\cos 2t=0.$

1659. $x\sin\alpha\sin(t-\alpha)-y\sin\alpha\cos(t-\alpha)+z-t\sin\alpha-\cos\alpha=0.$

1660. $(1,\ln 2,-4).$

1662. (1) $6x-8y-z+3=0,$

(2) $ax-by=a^2-b^2,$

(3) $x-y-\sqrt{2}z=0.$

1663. 主法线：$x=(a+\lambda)\cos t,\ y=(a+\lambda)\sin t,\ z=bt;$
副法线：$x=a\cos t+\lambda b\sin t,\ y=a\sin t-b\lambda\cos t,\ z=bt+\lambda a$
密切面：$bx\sin t-by\cos t+az-abt=0;$
法平面：$ax\sin t-ay\cos t-bz+b^2t=0;$
化直平面：$x\cos t+y\sin t-a=0;$

$$\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-\vec{i}a\sin t+\vec{j}a\cos t+b\vec{k});$$

$$\vec{\nu}=-\vec{i}\cos t-\vec{j}\sin t;$$

$$\vec{\beta}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(\vec{i}b\sin t-\vec{j}b\cos t+a\vec{k}).$$

1664. 切线：$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\lambda),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\lambda),z=1+2\lambda;$

法平面：$x-y+2\sqrt{2}(z-1)=0$；

副法线：$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-2\lambda)$，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-6\lambda)$，$z=1-\lambda$

密切面：$2x+6y+\sqrt{2}z-5\sqrt{2}=0$；

主法线：$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-7\lambda)$，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\lambda)$，$z=1+4\lambda$；

从切平面：$7x-y-\sqrt{2}(4z-1)=0$；

$$\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i}-\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k}),$$

$$\vec{\nu}=\frac{1}{\sqrt{82}}(-7\vec{i}+\vec{j}+4\sqrt{2}\vec{k}),$$

$$\vec{\beta}=\frac{1}{\sqrt{42}}(-2\vec{i}-6\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k}).$$

1665. $$\begin{vmatrix} x-c_1 & a_1 & b_1 \\ y-c_2 & a_2 & b_2 \\ z-c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

1666. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

1667. $k=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$，　$\kappa=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

1674. $2b^2=\pm 3ac$.

1675. $\vec{\omega}=\kappa\vec{\tau}+k\vec{\beta}$.

1678. 达布 (Darboux) 向量。

1682. $\xi=a(t+\sin t)$，$\eta=-a(1-\cos t)$，$\zeta=0$. 这是一条与已知旋轮线合同的新的旋轮线。

1683. 半立方抛物线 $27py^2=8(x-p)^3$.

1684. 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$，$z=0$.

1687. C^∞.

1688. $\vec{r}=\vec{\rho}+u^2\vec{e}$.

1689. $\vec{R}=\frac{1}{2}(\vec{r}(u^1)+\vec{\rho}(u^2))$.

1690. $x=u^1$, $y=a\cos u^2\operatorname{ch}\frac{u}{a}$, $z=a\sin u^2\operatorname{ch}\frac{u^1}{a}$.

1691. $a^2y^2=2pz(x-a)^2$.

1992. 四面体的体积等于$\frac{9}{2}a^3$.

1693. 所求之平方和等于 a^6.

1694. $x=u^1\cos u^2$, $y=u^1\sin u^2$, $z=au^2$. 其中 u^1是曲面上的点到轴 (Oz) 的距离，$u^2=\omega t$，这里 t 是时间，$a=\frac{v}{\omega}$.

1695. 切平面：$ax\sin u^2-ay\cos u^2+u^1z-au^1u^2=0$,
法线：$x=u^1\cos u^2+ta\sin u^2$, $y=u^1\sin u^2-ta\cos u^2$,
$z=au^2+tu^1$.

1703. $r^2(\cos^2u^2(du^1)^2+(du^2)^2)$.

1704. $(du^1)^2+((u^1)^2+a^2)(du^2)^2$.

1705. $(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2$, 其中 $p=f'_x$, $q=f'_y$.

1709. $\ln(u^1+\sqrt{(u^1)^2+a^2})\pm u^2=\text{const}$.

1710. $3\sqrt{2a^4+a^2+2}$.

1711. $3\frac{1}{3}a$.

1712. $|\operatorname{sh}u_2^1-\operatorname{sh}u_1^1|$.

1713. $\cos\varphi=\frac{2}{3}$.

1714. $\cos\varphi=\pm\frac{1-a^2}{1+a^2}$.

1715. $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

1716. $a^2\left[\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$.

1717. $\frac{a^2}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$.

1724. (1)设 $ds^2=\gamma_{ij}du^idu^j$ 和 $ds_1^2=g_{ij}dv^idv^j$ 分别是曲面 Φ_1 和 Φ_2 的第一基本二次形式，如果按规则 $v^1=u^1$，$v^2=u^2$ 作映射 h：$\Phi_1\longrightarrow\Phi_2$，有：$ds^2=\lambda ds_1^2$，则相对应的两条曲线间的夹角值就有同样的表示式，这就是说映射是保角的。

(2) 设映射 $h:\Phi_1\to\Phi_2$ 是保角的，并且 $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$ 是曲面 Φ_1 的参数化。$\vec{\rho}=\vec{\rho}(v^1,v^2)$ 是曲面 Φ_2 的参数化，如果 $(v^1,v^2)=h(u^1,u^2)$，假定 $v^1=u^1$，$v^2=u^2$。设 $ds^2=\gamma_{ij}du^idu^j$ 和 $ds_1^2=g_{ij}du^idu^j$ 分别是曲面 Φ_1 和 Φ_2 的第一基本二次形式。因为映射 h 是保角的，所以关于二次形式 ds^2 的每个正交对 (d) 和 (δ) 都变成关于二次形式 ds_1^2 的正交方向对。这就是说 $\gamma_{ij}du^i\delta u^j=0$ $\Longrightarrow g_{ij}du^i\delta u^j=0$。因为 δu^j 不能同时等于零，所以，

$$\begin{vmatrix}\gamma_{i1}du^i & \gamma_{i2}du^i\\ g_{i1}du^i & g_{i2}du^i\end{vmatrix}=0.$$

因为 du^i 是任意的，所以 $g_{ij}=\lambda\gamma_{ij}$。

1729. $\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{Rr}$.

1730 $\frac{|c|}{c^2+a^2}$.

1732. $\varphi=-\frac{a}{(u^1)^2+a^2}\left[(du^1)^2-((u^1)^2+a^2)(du^2)^2\right]$.

1733. $k_1=0$，$k_2=-\frac{1}{(u^1+u^2)\sqrt{2}}$.

1734. $k_1=-k_2=\frac{a}{(u^1)^2+a^2}$.

1736 $\ln(ay+\sqrt{1+a^2y^2})\pm\ln(ax+\sqrt{1+a^2x^2})=\text{const}$.

1739. $K=-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2\ln\lambda}{(\partial u^1)^2}+\frac{\partial^2\ln\lambda}{(\partial u^2)^2}\right)$.

1740. $K=-\frac{1}{\gamma_{22}}\frac{\partial^2\gamma_{22}}{(\partial u^1)^2}$.

1742. $K=-\frac{a^2}{(a^2+(u^1)^2)^2}$, $H=0$.

1744. $K'=4H^2=\text{const}$.

1745. 利用1738题的结果。

1746. $\cos\varphi=-\frac{4}{5}$.

1748. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

1749. $\operatorname{tg}\hat{A}=\operatorname{tg}\hat{B}+\operatorname{tg}\hat{C}$（应用王——奥别尔（Ван—Обеля）定理）。

1754. $\frac{8\sqrt{3}}{9}R$; $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$.

1764. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\hat{A}$.

1765. $\frac{1}{2}|\hat{B}-\hat{C}|$.

1766. $\frac{\pi}{2}-2\hat{A}$, $\hat{A}$是已知三角形的锐角中较小的一个锐角的值。

1767. $(MH,K)=\frac{a^2}{4p(p-a)}$, 其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

1768. $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{2}$.

1769. $\cos\hat{A}=\frac{4bc-b^2-c^2}{2bc}$

1770. $|AD|^2=bc-b'c'$.

1771. $\frac{t(b+c)}{4bc}\sqrt{4b^2c^2-t^2(b+c)^2}$.

1772. 1.

1773. $$\frac{1+\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}.$$

1774. $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}\frac{\sin(\hat{B}-\hat{C})}{\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}$（假定$\hat{B}>\hat{C}$）.

1775. $\sqrt{S\cdot S'}$.

1776. $$\left[\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

1777. $$\frac{1}{3}[(m_a+m_b+m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_a+m_c-m_b)$$
$$\times(m_a+m_b-m_c)]^{\frac{1}{2}}.$$

1778. $r=\frac{S}{p}$, $r_a=\frac{S}{p-a}$，其中S是三角形的面积，p是它的半周长。

1779. $\frac{abc}{4S}$.

1780. $\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$.

1781. $r_a+r_b+r_c=r+4R$.

1782. $\frac{1}{\sqrt{3}}(a^2+ab+b^2)$.

1783. $$1-\frac{\alpha}{1+\alpha}-\frac{\beta}{1+\beta}-\frac{\gamma}{1+\gamma}+\frac{\alpha^2\beta}{(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha\beta)}$$
$$+\frac{\beta^2\gamma}{(1+\beta)(1+\beta+\beta\gamma)}+\frac{\alpha\gamma^2}{(1+\gamma)(1+\gamma+\alpha\gamma)}.$$

1784. 3；4；5.

1785. $\frac{\pi}{2}$；$2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$；$\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

1786. $\dfrac{\sin\alpha}{4\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})-\sin\alpha}$.

1787. $\sqrt{b^2+bc}$.

1788. $4\sqrt{7}$.

1789. 2或1.

1790. $\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

1791. $\sqrt{\dfrac{c}{b}(p-b)(p-c)}$, $\sqrt{\dfrac{b}{c}(p-b)(p-c)}$.

1792. $88\dfrac{3208}{4205}$.

1793. $\left(\dfrac{p_1p_2}{ab}+\dfrac{p_2p_3}{bc}+\dfrac{p_1p_3}{ac}\right)S$.

1794. $\dfrac{8S^2}{abc}$.

1795. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

1796. $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$.

1797. $(2-\sqrt{3})a^2$.

1798. $\dfrac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

1799. $\dfrac{4(a^2+b^2+c^2)S^3}{9a^2b^2c^2}$.

1801. $a\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{10}$.

1812. 对角线的交点。

1813. $\dfrac{1}{2}(a-b)$.

1814. $\frac{2ab}{a+b}$.

1815. $\frac{2ab}{a-b}$.

1816 $|AC|^2+|BD|^2=|AD|^2+|BC|^2+2|AB|\cdot|CD|$.

1817. $\frac{1}{5}$.

1818. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

1819. 10.

1820. $\frac{1}{|AB|}=\frac{1}{|AC|}+\frac{1}{|AD|}$.

1821. $8a\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$, $2a^2\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

1822. $\frac{25\pi}{2}\text{cm}^2$.

1823. 6.

1824. $\frac{S_2\sqrt{2S_2}}{\sqrt{S_1+S_2}}$.

1825 $\frac{\sqrt{349}}{10}a$.

1826. 已知三角形应该是正三角形。

1827. 1260

1828. h^2.

1829 $\frac{(a+3b)a^2}{(b+3a)b^2}$.

1830. $|CM|=a\frac{a-b}{a+b}$.

1834. π.

1840 $\frac{1}{2R}(a\sqrt{4R^2-b^2}+b\sqrt{4R^2-a^2})$.

1841. $\dfrac{c^2-(a-b)^2}{4(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

1842. $\dfrac{1}{6}R$.

1843. $\dfrac{r^2}{4}(\pi+2\sqrt{3}-6)$.

1844. $r^2(12+7\sqrt{3})-\pi r^2\left(\dfrac{23}{6}+2\sqrt{3}\right)$.

1845. $\dfrac{3}{8}R$.

1846. $\dfrac{2}{5}r\left(\sqrt{4+\sin^2\alpha}-2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

1847. $\left(1+\dfrac{1}{3}\pi-\sqrt{3}\right)a^2$.

1848. $\dfrac{1}{2}(b+\sqrt{b^3+8a^2})$.

1849. $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$，$\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$，(如果$R\neq r$)．

1850. $\sqrt{\dfrac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$.

1851. $\sqrt{2Rr}$

1852. $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.

1853. $\dfrac{4R_3\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2}$.

1854. 5.

1855. 1.

1856. $\dfrac{1}{3}R^2$.

1857. $\frac{2Rr}{R+r}$.

1858. $2\sqrt{Rr}$, $2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$, $2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$.

1859. $\frac{(3\sqrt{3}-\pi)}{6}r^2$.

1860. $\frac{2S}{a+b}$.

1861. $\frac{17}{8}$.

1862. 2.

1863. $\frac{\sqrt{7}-1}{2}r$.

参考书目

1．几何学　卷1　Б.Т.巴兹列夫、К.И.杜尼切夫、В.И.伊娃尼茨卡娅、莫斯科、教育出版社、1974。

2．几何学　卷2　Б.Т.巴兹列夫、К.И杜尼切夫、莫斯科、教育出版社、1975。

3．解析几何习题集　С.В.巴赫瓦洛夫、П.С.莫杰诺夫、А.С.帕霍年科、莫斯科、科学出版社、1964。

4．画法几何　Н.А.格拉戈列夫、莫斯科、苏联国家技术理论出版社、1953（有中译本）。

5．凸形与多边形　Л.А.刘斯铁尼克、莫斯科、苏联国家技术理论书籍出版社、1956。

6．线性代数基础　А.И.马利采夫、莫斯科、科学出版社、1970（有中译本）。

7．微分几何习题集　П.С.莫杰诺夫、莫斯科、国家教育出版社、1949。

8．初等数学专门教程习题集　П.С.莫杰诺夫、莫斯科、苏联科学出版社、1957。

9．阿基米德半正面体　А.尼科利斯基、中学数学、1940。第五期、5—11页。

10．画法几何　А.А.潘克拉托夫、莫斯科、国家教育出版社、1959。

11．几何习题集、平面几何　М.波普鲁任科、列宁格勒、国家教育出版社、1939。

12．球面三角　Н.Н.斯捷潘诺夫、莫斯科—列宁格勒、苏联国家技术理论书籍出版社、1948（有中译本）。

13．微分几何练习与习题集　主编　В.Т.鲍得涅娃、明斯科、高教出版社、1970。

14．微分几何教程　С.П.菲尼科夫、莫斯科、苏联国家技术理论书籍出版社、1952（有中译本）。

15．几何学中的图形画法　Н.Ф.切特维鲁欣、莫斯科、国家教育出版社、1958。

名词索引

第一篇

汉	俄	英	题号	页数
域	Поле	Field	42	6
子空间	Подпространство	Subspace	44	7
交	Пересечение	Intersection	44	7
基底	Базис	Basis	45	7
线性相关	Линейно зависимая	Linear dependence	48	7
标准正交基	Ортонормированный Базис	Orthonormal basis	64	9
斯梯瓦定理	Теорема Стюарта	Stewart's Theorem	84	11
射影	Проекция	Projection	105	13
巴士命题	Предложение Паша	Pasch's proposition	111	14
标架	Репер	Frame	112	15
定向平面	Ориентированная плоскость	Oriented plane	138	17
高斯定理	Теорема Гаусса	Gauss Theorem	160	20
解析条件	Аналитическое условие	Analytic condition	166	20
凸角	Выпуклый угол	Convex angle	176	21
束	Пучок	Pencil	220	26
垂心	Ортоцентр	Orthocenter	235	28
巴卜定理	Теорема Паппа	Pappus theorem	256	30
映射	Отображение	Mapping	303	35
单射的	Инъективый	Injective	303	35

汉	俄	英	题号	页数
满射的	Сюръективный	Surjective	303	35
双射的	Биективный	Bijective	305	35
不动点	Инвариантная (неподвижная) Точка	Invariant point	306	35
轴对称	Осевая симметрия	Axial symmetry	312	35
不动直线	Инвариантная (неподвижная) прямая	Invariant line	320	36
旋转	Поворот	Rotation	323	36
平移	Перенос	Translation	323	36
滑动对称	Скользящая симметрия	Sliding (gliding) symmetry	324	37
旋转中心	Центр поворота	Center of rotation	328	37
象	Образ	Image	329	37
中心对称	Центральная симметрия	Central symmetry	333	38
面对称	Симметрия плоскости	Plane symmetry	334	38
对应点对	Пара соответствующих точек	Pair of corresponding points	336	38
位移	Перемещение	Displacement	352	40
圆束	Пучок окружностей	Pencil of circles	365	41
标准正交标架	Ортонормированный ребер	Orthonormal frame	366	41

汉	俄	英	题号	页数
第一类位移公式	Формула перемещения первого рода	Formulas of the displacement of the first kind	368	41
第二类位移公式	Формула перемещения второго рода	Formulas of the displacement of the second kind	369	42
一致定向	Одинаково ориентировны	Same oriented	371	42
相反定向	Противоположно ориентированы	Oppositely oriented	371	42
比值	Отношение	Ratio	375	42
相似	Подобие	Similarity	3章 § 3	43
位似中心	Центр гомотетии	Homothetic center	377	43
位似	Гомотетие	Homothety	378	43
位似公式	Формула гомотетии	Homothetic formula	378	43
闭折线	Замкнутая ломаная линия	Closed broken lines	381	43
位似系数	Коэффициент гомотении	Homothetic coefficient	382	43
正位似的中心	Центр положительной гомотетии	Positive homothetic center	391	44
相似变换	Преобраз ование Подобия	Similar transformation	394	44
第一类相似变换公式	Формула преобразования подобия первого рода	Formulas of the similar transformation of the first kind	400	45

汉	俄	英	题号	页数
第二类相似变换公式	Формула преобразования подобия второго рода	Formulas of the similar transformation of the second kind	401	45
相似系数	Коэффициент подобия	Similar coefficient	413	46
仿射变换	Аффинное преобразование	Affine transformation	3章§4	46
仿射标架	Аффинный репер	Affine frame	419	46
斜压缩	Косое сжатие	Skew compression	420	46
斜对称	Косая симметрия	Skew symmetry	422	46
等仿射变换	Эквиаффинное преобразование	Equiaffine transformation	422	46
错切变换	Преобразование сдвига	Shift transformation	424	46
中心仿射变换	Центроаффинное преобразование	Centroaffine transformation	426	47
平移	Параллельный	Translation	427	47
错切	Перенос Сдвиг	Shift	429	47
等积四角形	Равновеликий четырехугольник	Quadrangle of equal magnitude	432	47
仿射坐标系	Аффинная система Координаты	Affine coordinate system	433	47
不变线束	Инварианый пучок прямых	Invariant pencil of lines	434	47
仿射等价	Аффинно эквивалентны	Affine equivalent	447	48

汉	俄	英	题号	页数
平面的仿射变换	Аффинное преобразование плоскости	Planar affine transformation	459	50
群	Группа	Group	3章 § 5	51
变换群	Группа преобразования	Transformation group	3章 § 5	51
二阶位移群	Группа перемещение второго порядка	Displacement group of the second order	477	51
对称（自重合）群的阶	Порядок группы симметрий(самосовмещений)	Order of symmetric (self-coincident) group	478	51
不同构群	Неизоморфная Группа	Non-isomorphic group	479	51
子群	Подгруппа	Subgroup	482	52
阿贝尔群	Группа Абелевой	Abel group	484	52
直积	Прямое Произведение	Direct product	487	52
同态	Гомоморфизм	Homomorphism	490	52
同构	Изоморфизм	Isomorphism	494	52
有限子群	Конечная подгруппа	Finite subgroup	496	53
陪集	Смежный класс	Coset	497	53
二次曲线	Линия второго порядка	Curve of the second order	第四章	57
椭圆	Эллипс	Ellipse	541	58
长轴	Большая ось	Major axis	541	58
焦点	Фокус	Focus	541	58

汉	俄	英	题号	页数
准线	Директриса	Directrix	544	58
长半轴	Большая полуось	Major semi-axis	544	58
共轭直径	Сопряжённый диаметр	Conjugate diameter	550	59
共轭半直径对	Пара сопряжённых полудиаметров	Pair of conjugate semi-diameters	563	60
离心率	Эксцентриситет	Eccentricity	572	61
算术平均值	Арифметическое среднее	Arithmetic mean	572	61
双曲线	Гипербола	Hyperbola	580	62
渐近线	Асимптот	Asymptote	580	62
等轴双曲线	Равносторонная гипербола	Equilateral hyperbola	589	63
虚轴	мнимая ось	Imaginary axis	590	63
压缩系数	Коэффициент сжатия	Coefficient of compression	595	63
平面变换	Преобразование плоскости	Transformation in the plane	595	63
共轭双曲线	Сопряжённые Гиперболы	Conjugate hyperbola	619	65
反对称的	Кососимметрический	Skew symmetrical	619	65
抛物线	Парабола	Parabola	621	65
抛物线的参数	Параметр параболы	Parameter of parabola	621	66

汉	俄	英	题号	页数
共轭方向	Сопряжённое направление	Conjugate directions	646	67
軌　　道	Траектория	Trajectory	656	68
主　方　向	Главное направление	Principal direction	667	70
典　范　型	Канонический вид	Canonical form	669	70

第 二 篇

汉	俄	英	题号	页数
欧几里得（欧氏）空间	Евклидвое пространство	Euclidean Space	第二篇	72
仿射空间	Аффинное пространство	Affine Space	第二篇	72
空间坐标法	Метод координат в пространстве	Coordinate Method in space	第二篇 §1	73
坐　标　面	Координатная плоскость	Coordinate Plane	673	73
对　　棱	Противоположное ребро	Opposite Edges	675	73
向量空间	Векторное пространство	Vector Space	681	74
线性相关	Линейно зависимы	Linear Dependence	681	74
方向向量	Направляющий вектор	Direction Vector	683	74
定　　向	Ориентация	Orientation	684	74

汉	俄	英	题号	页数
一致定向	Одинаково ориентированы	Same oriented	695	75
向量积	Векторное произведение	Vector Product	1章§2	76
截面、截线	Сечение	Section	706	77
半平面	Полуплоскость	Semi-plane	707	77
共面的	Компланарный	Coplanar	708	77
非共面向量	некомпланарные векторы	Non-coplanar Vectors	709	77
雅哥比恒等式	тождество Якоби	Jacobi's Identity	713	77
拉格朗日恒等式	Тождество Лагранжа	Lagrange's Identity	715	78
混合积	Смешанное произведение	Mixed Product	1章§3	78
仿射标架	Аффинный репер	Affine frame	741	81
二次曲面	Поверхность второго порядка	Surface of second order	3章	95
锥面	Коническая поверхность	Conical surface	3章§1	95
旋转曲面	Поверхность вращения	Surface of revolution	3章§1	95
旋转锥面	Конус вращения	Cone of revolution	836	95
二次柱面	Цилиндр второго порядка	Cylinder of second order	837	95

汉	俄	英	题号	页数
旋转柱面	Цилиндрическая поверхность вращения	Cylindrical surface of revolution	839	95
抛物柱面	Параболический цилиндр	Parabolic cylinder	842	95
准线	Направляющая	Directrix	846	95
圆锥、锥面	Конус	Cone	849	96
半空间	Полупространство	Semi-space	852	96
椭圆面	Эллипсоид	Ellipsoid	3章 § 2	98
内点	Внутренная точка	Interior point	873	101
椭圆型	Эллиптический тип	Elliptic type	876	102
双曲面	Гиперболоид	Hyperboloid	3章 § 3	104
单叶双曲面	Однополостный гиперболоид	Hyperboloid of one sheet	886	104
直母线	Прямолинейная образующая	Rectilinear generator	892	105
切平面	Касательная плоскость	Tangent plane	893	105
有心曲线	Центральная линия	Central curve	894	105
渐近锥面	Асимптотический конус	Asymptotic cone	896	106
双叶双曲面	Двуполостный гиперболоид	Hyperboloid of two sheets	897	106
腰椭圆	Горловый эллипс	Gorge ellipse	901	10[illegible]
抛物面	Параболоид	Paraboloid	3章 § 4	10[illegible]

汉	俄	英	题号	页数
双曲抛物面	Гиперболический параболоид	Hyperbolic paraboloid	911	108
椭圆抛物面	Эллиптический параболоид	Elliptic paraboloid	916	109
坐标超平面	Координатная гиперплоскость	Coordinate hyperplane	921	110
超 平 面	Гиперплоскость	Hyperplane	925	110
n维仿射空间	Аффинное n-мерное пространство	n-dimensional affine Space	4章	110
秩	Ранг	Rank	933	112
一般位置点组	Система точек общего положения	System of points in general position	934	112
域	Поле	Field	935	112
平移空间	Пространство переносов	Space of translation	937	113
单 纯 形	Симплекс	Simplex	942	113
k维欧氏空间	К-мерное Евклидово ороостранство	k-dimensional Euclidean space	975	118
k 维 平 面	К-мерная плоскость	k-dimensional plance	975	118
超 侧 面	Гиперплоскость гиперграни	Hyperplanes of hyperlateral face	992	119
标准正交坐标	Ортонормированая координата	Orthonormal coordinates	994	120
有 序 组	Упорядоченная система	Ordered system	996	120

汉	俄	英	题号	页数
记号形式的行列式	Символическая определитель	Symbolic determinant	996	121
格莱姆行列式	Определитель Грама	Gram's determinant	999	121
二次形	Квадратичная форма	Quadratic form	5章§1 1021	125
双线形	Билинейная форма	Bilinear form	§1	125
矩阵	Матрица	Matrix	1022	125
正定的	Положительно определённая	Positive definite	1026	126
n 元组	n-Ка	n-tuple	1030	126
标准形	Нормальный Вид	Normal type	1032	127
二次曲面	Квадрика	Quadric	5章§2	127
并	Объединение	Union	1037	127
中心二次曲面	Центральная квадрика	Central quadric	1039	128
二次曲面的中心	Центр квадрики	Center of quadric	1040	128
二次曲面的直径超平面	Диаметральная гиперплоскость квадрки	Diametral hyperplane of quadric	1043	129
指标 l 的双曲线	Гиперболоид индекса l	Hyperboloid of index l	1046	129
指标 l 的锥面	Конус индекса l	Cone of index l	1046	129
中心超二次曲面	Центральная гиперквадрика	Central hyperquadric	1048	129

汉	俄	英	题号	页数
非渐近方向	Неасимптотическое направление	Nonasymptotic direction	1050	130
直径平面	Диаметральная плоскость	Diametral plane	1050	130
实的直母线	Вещественная прямолинейная образующая	Real rectilinear generator	1051	130
主方向	Главное направление	Principal direction	1052	130
主直径平面	Главное диаметральная плоскость	Principal diametrical plane	1055	130
凸的图形	Выпуклая фигура	Convex figure	6章 § 1	131
重心坐标	Барицентрическая координата	Barycentric coordinate	1059	131
把、丛	Связка	Bundle, sheaf	1065	132
凸多面体	Выпуклый многогранник	Convex polyhedron	6章 § 1	131
n 维多面体	n-мерный многогранник	n-dimensional polyhedron	1068	132
(n-1)维体	(n-1)-Мерное тело	(n-1)dimensional solid	1070	133
楔形	Клин	Wedge	1073	133
正多面体	Правильный многогранник	Regular polyhedron	6章 § 2	133
半正多面体	Полуправильный многогранник	Semi-regular polyhedron	6章 § 2	133
菱形十二面体	Ромбический додекаэдр	Rhombic dodecahedron	1075	133

汉	俄	英	题号	页数
正八面体	Правильный октаэдр	Regular octahedron	1078	131
正十二面体	Правильный додекаэдр	Regular dodecahedron	1079	131
正二十面体	Правильный икосаэдр	Regular icosahedron	1080	134
半正八面体	Полуправильный восьмигранник	Semi-regular octahedron	1087	134
半正14面体	Полуправильный 14—Гранник	Semi-regular 14-hedron	1088	134
半正32面体	Полуправильный 32—Гранник	Semi-regular 32-hedron	1090	135
半正26面体	Полуправильный 26—Гранник	Semi-regular 26-hedron	1092	135
立方八面体	Кубоктаэдр	Cubic octahedron	1093	135
十二面体上的二十面体	Додекаэдроикосаэдр	Dodecahedron on icosahedron	1094	135

第三篇

汉	俄	英	题号	页数
射影空间	Проективное пространство	Projective space	三篇	139
映象法	Метод изображения	Method of image	三篇	139
射影坐标	Проективный координат	Projective coordinate	1章§1	139
模	Модуль	Module	1095	139
剩余域	Поле вычета	Field of residue	1095	139

汉	俄	英	题号	页数
射影平面	Проективная плоскость	Projective plane	1096	139
n维射影空间	n-Мерное проективное пространство	n-dimensional projective space	1100	139
模型	Модель	Model	1105	139
扩大直线	Расширенная прямая	Extended line	1105	139
射影标架	Проективный репер	Projective frame	1106	139
本义点	Собственая точка	Proper point	1107	140
非本义点	Несобственая точка	Improper Point	1112	141
扩大平面	Расширенная плоскость	Extended plane	1113	141
齐次仿射坐标	Однородная аффинная координата	Homogeneous affine coordinate	1128	144
笛沙格定理	Теорема Дезарга	Desargues theorem	1章 § 2	144
对偶原理	Принцип двойственности	Principle of duality	1130	144
对偶定理	Двойственная теорема	Dualistic theorem	1131	145
图形	Чертеж	Figure	1132	145
不可及点	Недоступная точка	Inaccessible Point	1132	145
可及部分	Доступная часть	Accessible part	1132	145
射影映射	Проективное отображение	Projective mapping	§ 3	146

汉	俄	英	题号	页数
双曲射影变换	Гиперболическое проективное преобразование	Hyperbolic projective transformation	1146	147
射影变换	Проективное преобразование	Projective transformation	§ 3	147
压缩	Сужение	Compression, Contraction	1148	147
透视的	Перспективное	Perspective	1149	148
巴卜定理	Теорема Паппа	Pappus' theorem	1153	148
非本义直线	Несобственная прямая	Improper line	1155	148
交比	Сложное отношение	Cross ratio	2章 § 1	150
调和四元组	Гармонические четверки	Harmonic set of four	2章 § 1	150
完全四点形	Полный четырехвершинник	Complete quadrilateral	2章 § 1	150
调和分离	Гармонически разделяют	Harmonically separated	1169	151
直线的射影变换	Проективное преобразование прямой	Projective transformation in the line	2章 § 2	152
平面的射影变换	Проективное преобразование плоскости	Projective transformation in the plane	2章 § 2	152
抛物射影变换	Параболическое проективное преобразование	Parabolic projective transformation	1179	152
对合	Инволюция	Involution	1180	152

汉	俄	英	题号	页数
双曲对合	Гиперболическая инволюция	Hyperbolic involution	1181	153
椭圆对合	Эллиптическая инволюция	Elliptic involution	1183	153
对合的类型	Тип инволюции	Types of involution	1184	153
透射	Гомология	Homology	1189	154
透视中心	центр перспективы	Center of Perspective	1192	154
亲似变换	Родственное преобразование	Perspective affine transformation	1194	154
亲似	Родство	Perspective affine	1194	154
调和（对合）透射	Гармоническая (инволютивная) гомология	Harmonic (involutory) homology	1200	155
透射中心	Центр гомологии	Center of homology	1200	155
透射轴	Ось гомологии	Axis of homology	1200	155
本义中心	Собственный центр	Proper center	1203	155
本义轴	Собственная ось	Proper axis	1203	155
二次卵形线（圆锥曲线）	Овальная кривая второго порядка	Oval's curve of the second order (conic)	1208	157
极点	Полюс	Pole	1208	157
极线	Поляр	Polar	1209	157
图象、映象	Изображение	Image	1232	159
帕斯卡直线	Прямая Паскаля	Pascal's line	1236	160

汉	俄	英	题号	页数
六点形	Шестивершинник	Six point figure	1236	160
布利安雄点	Точка Брианшона	Brianchon's point	1237	160
射影模型	Проективная модель	Projective model	1252	161
相交法	Метод пересечений	Method of intersection	3章§1	162
托里析利点	Точка Торичелли	Torricelli's point	1266	162
变换法	Метод преоброзований	Method of transformation	3章§2	163
代数法	Алгебраический метод	Algebraic method	3章§3	165
等积图形	Равновеликая фигура	Equivalent figures	1316	166
对径点	Диаметрально противоположная точка	Diametrally opposite points	1330	167
平行射影法	Параллельное проектирование	Method of parallel projection	4章§1	169
平行射影	Параллельная проекция	Parallel projection	1356	169
共轭直径	Спряжённый диаметр	Conjugate diameter	1368	170
赤道	Экватор	Equatop	1385	171
经线	Меридиан	Meridian	1385	171
轴测法	Аксонометрия	Axonometry	4章§2	171
轴测射影	Аксонометрическая проекция	Axonometric projection	1390	171
迹线	След	Trace	1392	172
轴测轴	Аксонометрическая ось	Axonometric axis	1394	172

汉	俄	英	题号	页数
迹线三角形	Треугольник следа	Triangle of trace	1394	172
畸变	Искажение	Distortion	1394	172
畸变系数	Коэффициент искажения	Coefficient of distortion	1394	172
正等轴测射影	Ортогональная изометрическая проекция	Orthogonal isometric projection	1395	172
正二轴测射影	Ортогональная диметрическая проекция	Orthogonal bimetrical projection	1395	173
魏斯巴赫定理	Теорема Вейсбаха	Weissbach's theorem	1397	173
位置问题	Позиционная задача	Positional problem	4章§3	173
度量问题	Метрическая задача	Metrical problem	4章§3	173
原象	Оригинал	Original, pre-image	1405	174
实际值	Истинная величина	True value	1423	175
蒙日法	Метод Монжа	Monge's method	4章§4	177
正射影图	Эпюр, эпюра	Diagram, Epure(F.)	1442	177
射影的侧立平面	Профильная плоскость проекций	Profile plane projection	1450	178
纬线	Параллель	Parallel	1450	178
周线	Очертание	Contour	1450	178
中心射影	Центральная проекция	Central projection	1452	178
透视射影	Перспектива	Perspective	1453	178

汉	俄	英	题号	页数
灭　　线	Линия схода	Vanishing line	1452	178
基　　线	Основание	Base	1453	178

第四篇

汉	俄	英	题号	页数
几何基础	Основания геометрии	Foundations of geometry	第4篇	183
非欧几何	Несвклидовы геометрии	Non-Euclidean geometry	第4篇	183
公理法	Аксиоматика	Axiomatics	1章§1	183
仿射直线	Аффинная прямая	Affine line	1462	183
一维仿射空间	Одномерное аффинное пространство	One dimensional affine space	1462	183
结　　构	Структур	Structure	1465	183
维　　数	Размерность	Dimension	1466	183
同　构　的	Изоморфный	Isomorphism	1467	183
公　　理	Аксиома	Axiom	1468	183
韦尔公理	Аксиома Вейля	Weyl's axiom	1468	183
公　　设	Постулат	Postulate	1471	183
命　　题	Предложение	Proposition	1471	183
希尔伯特公理组	Группы аксиом Гильберта	Groups of Hilbert's axioms	1476	184

汉	俄	英	题号	页数
萨开里四边形	Четырехугольник Саккери	Saccheri's quadrilateral	1479	184
绝对几何公理	Аксиомы абсолютной геометрии	Axioms of absolute geometry	1479	184
韦尔公理系统	Система аксиом Вейля	Systems of Weyl's axioms	1章 §2	184
可换结合环	Ассоциативно-коммутативное кольцо	Associatively commutative ring	1480	184
n 维（自由）单式模	n-Мерный(свободный) унитарный модуль	n-dimensional(free) unitary module	1480	184
自由 A 模	Свободный A-модуль	Free A-module	1480	184
自由n维A模	Свободный n-мерный A модуль	Free n-dimensional A-module	1480	185
相容的	Непротиворечивый	Consistent	1480	185
独立的	Независимый	Independently	1481	185
双线性对称形式	Билинейная симметрическая форма	Bilinear symmetric form	1487	185
g—正交	g—Ортогональный	g-orthogonal	1488	186
属于公理	Аксиома принадлежности	Axioms of incidence	1497	187
距离公理	Аксиома расстояния	Axioms of distance	1497	187
顺序公理	Аксиома порядка	Axioms of order	1497	187
对合的	Инволютивное	Involutory	1502	187

汉	俄	英	题序	页码
空间的位移	Перемещение пространства	Displacement of space	1510	18[illegible]
球面几何	Сферическая геометрия	Spherical geometry	2章§1	189
球面三角形	Сферичесий треугольник	Spherical triangle	1511	189
五元素公式	Формула пяти элементов	Five elements formula	1518	189
四元素公式	Формула четырех элементов	Four elements formula	1521	189
球面毕达哥拉斯定理	Сферическая теорема Пифагора	Spherical Pythagoras' s theorem	1522	190
超出量	Избыток	Excess	1534	193
纳皮尔公式	Формула Непера	Napierian formula	1535	193
黎曼椭圆几何	Эллиптическая геометрия Римана	Elliptical geometry of Riemann	2章§2	194
椭圆平面	Эллиптическая Плоскость	Elliptic plane	1538	194
子群	Подгруппа	Subgroup	1544	195
子集	Подмножество	Subset	1544	195
三角不等式	Неравенство треугольника	Triangular inequality	1546	195
罗巴切夫斯基双曲几何	Гиперболическая геометрия Лобочевского	Lobachevski's hyperbolic geometry	2章§3	196

汉	俄	英	题号	页数
罗氏平面	Плоскость Лобачевского	Lobachevski's plane	1554	196
离散直线	Расходящаяся прямая	Divergent lines	1558	196
极限圆	Орицикл	Oricycle	1560	196
开莱—克来因模型	Модель Кэли—Клейна	Cayley—Klein model	1569	197

第五篇

汉	俄	英	题号	页数
拓扑空间	Топологическое пространство	Topological space	1章 § 1	201
同胚	Гомеоморфизм	Homeomorphism	1章 § 1	201
拓扑簇	Семейство топологии	Topological family	1574	201
邻域	Окрестность	Neighbourhood	1576	201
内部	Внутренность	Interior	1580	201
闭包	Замыкание	Closure	1580	201
边界	Граница	Boundary	1580	201
拓扑基	База топологии	Topological base	1582	201
开球	Открытый шар	Open sphere	1582	201
连通空间	Связное пространство	Connected space	1589	201
开凸子集	Открытое выпуклое подмножество	Open convex subset	1592	203
开环面	Открытое кольцо	Open ring	1599	203
开圆	Открытое круг	Open Circle	1602	203

汉	俄	英	题号	页数
流形	Многообразие	Manifold	1章§2	203
拓扑流形	Топологическое многообразие	Topological manifold	1604	203
定义域	Облость определения	Domain of definition	1604	203
图	Карта	Chart	1604	203
规则	Закон	Law	1604	203
环面	Тор	Torus, Anchor ring	1604	203
笛氏乘积	Декартовый квадрат	Cartesian square	1604	203
坐标邻域	координатная окрестность	Coordinate neighborhood	1606	204
复盖	Покрыть	To Cover	1606	204
开子集	Открытое подмножество	Open subset	1614	204
实数域	Поле вещественных чисел	Field of real numbers	1615	204
p—标架空间	Пространство p—реперов	Space of p-frames	1616	204
格拉斯曼流形	Грассманово многообразие	Grassmann's manifold	1617	205
指标	Индекс	Index	1618	205
欧拉特征数	Эйлерова характеристика	Euler's characteristic	1章§2	205
闭圆盘	Замкнутый круг	Closed disc	1619	205
闭圆环	Замкнутое кольцо	Closed ring	1620	205

汉	俄	英	题号	页数
侧面	Боковая поверхность	Lateral surface	1622	205
n 角棱柱	n—угольная призма	n-gonal prism	1622	205
n 角棱锥	n—угольная пирамида	n-gonal pyramid	1623	205
光滑曲线	Гладкая кривая	Smooth Curve	2章 § 1	206
弧长	Длина дуги	Length of arc	2章 § 1	206
浸没的等价性	Эквивалентность погружений	Immersed equivalence	1624	206
浸没	Погружение	Immersion	1626	206
C^∞—等价	C^∞—Эквивалентны	C^∞-equivalent	1627	206
曳物线	Трактриса	Tractrix	1629	206
曲线的光滑类	Класс гладкости линий	Class of smooth curves	1629	206
寻常(圆形)螺旋线	Обыкновенная винтовая линия	Ordinary helix	1631	207
垂足曲线	Подэра	Pedal of a Curve	1638	208
星形线	Астроида	Astroid	1647	209
旋轮线	Циклоида	Cycloid	1648	209
简单曲线	Простая линия	Simple Curve	1648	209
拱弧	Арка	Arch	1649	210
悬链线	Цепная линия	Catenary	1651	210
典型标架	Канонический репер	Canonical frame	2章 § 2	210
密切面	Соприкасающаяся плоскость	Osculating plane	1652	210

汉	俄	英	题号	页数
主法线	Главная нормаль	Principal normal	1657	211
副法线	Бинормальная линия	Binormal	1659	211
法平面	Нормальная плоскость	Normal plane	1663	212
从切(化直)平面	Спрямляющая плоскость	Rectifying plane	1663	212
广义螺旋线	Обобщенная винтовая линия	Generalized helix	1671	213
弗莱纳公式	Формулы Френе	Frenet's formula	1675	214
达布向量	Вектор Дарбу	Darboux's Vector	1675	214
贝特朗曲线	Кривая Бертрана	Bertrand's Curve	1679	214
直纹曲面	Линейчатая поверхность	Ruled Surface	1688	216
悬链面	Катеноид	Catenoid	1690	216
劈锥曲面	Коноид	Conoid	1691	216
正螺旋面	Геликоид	Helicoid	1694	217
简单螺旋面	Простая винтовая поверхность	Simply helicodial surface	1694	217
脊线	Ребро возврата	Edge of regression	1696	217
第一基本二次形式	Первая квадратичная форма	First quadratic form	2章§2	218
曲线网	Сеть линий	Net of Curves	1707	219
切贝雪夫网	Чебышевская сеть	Tchebyshev's Net	1707	219
微分方程	Дифференциальное уравнение	Differential Equation	1708	219

汉	俄	英	题号	页数
正交网	Ортогональная сеть	Orthogonal Net	1708	219
曲边三角形	Криволинейный треугольник	Curvilinear triangle	1711	220
可展曲面	Развертывающаяся поверхность	Developable Surface	1719	221
保距的	Изометрическое	Isometric	1720	221
局部保距	Локально изометрична	Local isometric	1720	221
保距映射	Изометрическое отображение	Isometric Mapping	1722	221
可微同胚	Диффеоморфизм	Diffeomorphism	1724	222
保角映射	Конформное отображение	Conformal mapping	1724	222
光滑曲面	Гладкая поверхность	Smooth Surface	1724	222
参数化	Параметризация	Parametrization	1724	222
保面映射	Эквиареальное отображение	Equareal Mapping	1725	222
可测图形	Квадрируемая фигура	Squarable figure	1725	222
测地线	Геодезическая линия	Geodesic Line	1726	222
测地曲率	Геодезическая кривизна	Geodesic curvature	1730	223
第二基本二次形式	Вторая квадратичная форма	Second quadratic Form	2章§3	223
等温坐标	Изотермическая координата	Isothermal Coordinates	1739	224

曲率线	Линия кривизны	Line of curvature	1745	225

答案部分

汉	俄	英	题号	页数
同向性	Сонаправленность	Same direction	29	239
斜对称	Косая симметрия	Skew symmetry	426	261
反对称形式	Кососимметрическая форма	Skew symmetric form	1025	282
商集	Фактормножество	Quotient Set	1095	284
三点形	Трехвершинник	Three points figure	1137	287
奇异透射	Особая гомология	Singular homology	1187	289
显然的解法	Тривиальное решение	Trivial solution	1221	292
斯丹纳定理	Теорема Штейнера	Steiner's theorem	1229	292
配极共轭	Полярно сопряжены	Polar Conjugate	1254	295
阿波罗尼圆	Окружность Аполлония	Apollonius' Circle	1269	295
中外比	Крайнее Исреднее отношении	Extreme and mean retio	1358	300
黄金分割	«Золотое сечение»	Golden Section	1358	300
紧致的	Компактный	Compactly	1591	320